## OPCIÓN A

**1.** *Un fabricante comercializa 2 modelos de pantalón vaquero, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 12 euros por unidad y otro para hombre con beneficio unitario de 20 euros. El próximo mes desea fabricar entre 50 y 750 pantalones para mujer y siempre un número no inferior al que fabrica para hombre. Además no tiene posibilidades de fabricar mensualmente más de 1000 unidades en total.*

*a) Plantee un programa lineal que permita calcular el número de unidades de cada modelo que ha de fabricar para maximizar el beneficio total.* *(2 puntos)*
*b) Resolviendo el programa anterior diga el máximo beneficio y cuántas unidades de cada modelo se han de comercializar.* *(5,5 puntos)*
*c) Diga la solución del apartado anterior si el beneficio unitario es de 15 euros para cada uno de los dos modelos.* *(2,5 puntos)*

*NOTA: No es necesario considerar que las cantidades fabricadas sean números enteros.*

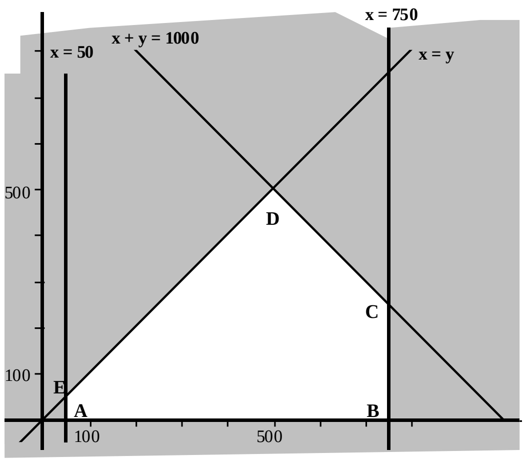
**SOLUCIÓN.**

a) Sea *x* el número de pantalones de mujer e *y* el número de pantalones de hombre que deben fabricarse.
La función objetivo (función de beneficios) es $F(x,\ y) = 12x + 20y$ que debe maximizarse.

Las restricciones a que está sometida la solución son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 50 \leq x \leq 750 \\ x \geq y \\ x + y \leq 1000 \end{cases}$

b) Representemos la región factible (puntos del plano que son solución del sistema de restricciones):

• La recta $x = 0$ es el eje de ordenadas y la inecuación $x \geq 0$ tiene por solución el semiplano de la derecha. La recta $y = 0$ es el eje de abscisas y la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.
• Las rectas $x = 50$ y $x = 750$ son rectas paralelas al eje de ordenadas y la parte del plano solución a las inecuaciones $x \geq 50$ y $x \leq 750$ es la comprendida entre ambas.
• La recta $x = y$ es la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. La inecuación $x \geq y$ tiene por solución el semiplano al que pertenece el punto $(100, 0)$ por ejemplo.
• La recta $x + y = 1000$ pasa por los puntos $(200, 800)$ y $(500, 500)$, por ejemplo. El semiplano solución de la inecuación $x + y \leq 1000$ es el que contiene al origen de coordenadas.
• La región factible es el pentágono de extremos A, B, C, D y E de la figura.




La solución óptima se tiene en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos las coordenadas de dichos vértices y el valor en cada uno de ellos de la función objetivo:

$A(50, 0) \Rightarrow F(50, 0) = 600$ € ; $B(750, 0) \Rightarrow F(750, 0) = 9000$ € ; $C(750, 250) \Rightarrow F(750, 250) = 14000$ €
$D(500, 500) \Rightarrow F(500, 500) = 16000$ € ; $E(50, 50) \Rightarrow F(50, 50) = 1600$ €

Por tanto, deben comercializarse 500 pantalones de cada uno de los modelos y el beneficio que se obtendrá es de 16000 euros.

c) La región factible no varía y la nueva función objetivo es $F(x,\ y) = 15x + 15y$. El valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible es:

$F(50,0)=750$ € ; $F(750,0)=11250$ € ; $F(750,250)=15000$ € ; $F(500,500)=15000$ € ; $F(50,50)=1500$ €

Luego ahora la solución es la pareja de coordenadas de cualquier punto del segmento CD de la región factible. El beneficio será de 15000 euros.

**2.** *Se considera la función* $f(x)=ax^3+b\cdot\ln x$ *siendo a y b parámetros reales.*

*a) Determine los valores de a y b sabiendo que* $f(1)=2$ *y que la derivada de* $f(x)$ *es nula en* $x=1$. *(3 puntos)*

*b) Para* $a=4/3$ *y* $b=1$, *determine los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de* $f(x)$ *(5 puntos)*

*c) Para* $a=b=-2$, *calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. *(2 puntos)*

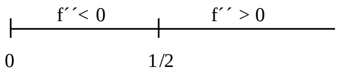
**SOLUCIÓN.**

a) $f(1)=2 \Rightarrow a+b\cdot 0=2 \Rightarrow a=2$

$f'(x)=3ax^2+\dfrac{b}{x}$ y como $f'(1)=0 \Rightarrow 3a+b=0 \Rightarrow 6+b=0 \Rightarrow b=-6$

b) Para los valores de a y b dados, la función es $f(x)=\dfrac{4}{3}x^3+\ln x$. La concavidad y convexidad dependen del signo de $f''(x)$: $f'(x)=\dfrac{4}{3}\cdot 3x^2+\dfrac{1}{x}=4x^2+\dfrac{1}{x} \Rightarrow f''(x)=8x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{8x^3-1}{x^2}$.

El denominador de $f''(x)$ es positivo $\forall x$. El numerador: $8x^3-1=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}=\dfrac{1}{2}$ y como el dominio de definición de la función es $(0,\infty)$ la segunda derivada tiene los siguientes signos:




Luego la función es convexa en $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ y cóncava en $\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$ y como la función es continua en todo su dominio, en $x=\dfrac{1}{2}$ hay un punto de inflexión.

c) Ahora la función es: $f(x)=-2x^3-2\cdot\ln x$.

Dando valores a x cada vez más grandes y positivos: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Dando a x valores cada vez más próximos a cero (positivos): $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$

**3.** *Una empresa tiene dos fábricas, en la primera son mujeres el 60% de los trabajadores y en la segunda son hombres el 55% de los trabajadores. Se elige al azar un trabajador de cada fábrica para pertenecer al comité de empresa.*

*a) Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:*

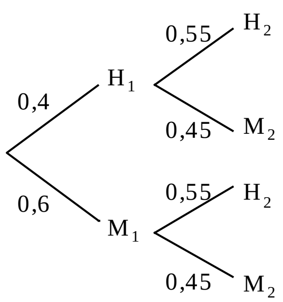
*A = Ambos son hombres (2 puntos)*

*B = Sólo uno es mujer (3 puntos)*

*C = Ambos son mujeres (2 puntos)*

*b) Razone si el suceso contrario del suceso C es el A, el B, el* $A\cap B$, *el* $A\cup B$ *o algún otro suceso y calcule su probabilidad. (3 puntos)*

**SOLUCIÓN.**




Sean $H_1$ y $M_1$ los sucesos "el trabajador elegido en la primera fábrica es hombre" y "el trabajador elegido en la primera fábrica es mujer" y $H_2$ y $M_2$ los sucesos correspondientes en la segunda fábrica. El diagrama en árbol de las posibles situaciones que pueden darse y sus correspondientes probabilidades es:

a) Se tiene:

$$p(A)=p(H_1\cap H_2)=p(H_1)\cdot p(H_2)=0{,}4\cdot 0{,}55=0{,}22$$
$$p(B)=p(H_1)\cdot p(M_2)+p(M_1)\cdot p(H_2)=0{,}4\cdot 0{,}45+0{,}6\cdot 0{,}55=0{,}51$$
$$p(C)=p(M_1\cap M_2)=p(M_1)\cdot p(M_2)=0{,}6\cdot 0{,}45=0{,}27$$

b) El suceso contrario del suceso "ambos son mujeres" es el suceso "alguno es hombre" y éste es el suceso que se verifica cuando "los dos son hombres" o cuando "uno es hombre y el otro mujer" luego:

$$\overline{C} = A \cup B \quad y \quad p(\overline{C}) = p(A \cup B) = 1 - 0,27 = 0,73$$

**OPCIÓN B**

**1.** *Discuta y resuelva el siguiente sistema para todos los valores del parámetro a. (Utilice el método de Gauss para su resolución).*

$$\begin{cases} 4x + ay - 2z = -1 \\ x + y - az = -1 \\ x + y + (2a+2)z = 6 - a \end{cases}$$

*(10 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

Discusión del sistema: escribamos las matrices de los coeficientes A y ampliada B para comparar sus rangos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array}\right) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -1 \\ 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array}\right) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -a & -1 \\ 0 & a-4 & 4a-2 & 3 \\ 0 & 0 & 3a+2 & 7-a \end{array}\right)$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $F_1 \leftrightarrow F_2$ (2) $F_2 - 4F_1$ , $F_3 - F_1$

- Si $3a + 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$: rg A =2 y rg B=3 $\Rightarrow$ rg A $\neq$ rg B $\Rightarrow$ el sistema es incompatible
- Si $a \neq -\frac{2}{3}$ , 4 : rg A = rg B = 3 = nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 4$: $\text{rg}\,A = \text{rg}\,B = 2 <$ nº incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado

Resolución del sistema:

- Para $a \neq -\frac{2}{3}$, debemos resolverlo en función del parámetro a.

El sistema dado es equivalente al sistema escalonado: $\begin{cases} x + y - az = -1 \\ (a-4)y + (4a-2)z = 3 \\ (3a+2)z = 7 - a \end{cases}$

que resolveremos de abajo hacia arriba.

De la tercera ecuación: $z = \frac{7-a}{3a+2}$. Sustituimos este valor en la segunda ecuación y despejamos y:

$$(a-4)y = 3 - (4a-2)\cdot\frac{7-a}{3a+2} = \frac{9a + 6 - 28a + 4a^2 + 14 - 2a}{3a+2} = \frac{4a^2 - 21a + 20}{3a+2} \Rightarrow y = \frac{4a^2 - 21a + 20}{(a-4)(3a+2)} = \frac{4a-5}{3a+2}$$

Por último sustituimos en la primera ecuación y despejamos x:

$$x = -1 - y + az = -1 - \frac{4a-5}{3a+2} + \frac{7a - a^2}{3a+2} = \frac{-3a - 2 - 4a + 5 + 7a - a^2}{3a+2} = \frac{-a^2 + 3}{3a+2}$$

- Para $a = 4$, el sistema escalonado equivalente es: $\begin{cases} x + y - 4z = -1 \\ 14z = 3 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{3}{14}$ ; $x = -\frac{1}{7} - \lambda$ ; $y = \lambda$

**2.** *Se considera la función* $f(x) = \left(x^2 + a\right) \cdot e^{ax}$ *siendo a un parámetro real.*

*a) Razone a qué es igual el dominio de* $f(x)$. *(1,25 puntos)*

*b) Determine el valor de a para que la gráfica de* $f(x)$ *pase por el punto* $(0, -4)$ *(1,25 puntos)*

*c) Para* $a = -2$, *determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de* $f(x)$. *¿Existen máximos y mínimos relativos de* $f(x)$ *?, en caso afirmativo, decir dónde se alcanzan y su valor.* *(7,5 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) El dominio de f(x) es R (la recta real) porque es el producto de una función polinómica, cuyo dominio es R, y de una función exponencial cuyo dominio es R.

b) Debe ser $f(0) = -4$: $\quad a \cdot e^0 = -4 \Leftrightarrow a = -4$

c) La función es $f(x) = \left(x^2 - 2\right) \cdot e^{-2x}$. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de $f'(x)$:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-2x} + \left(x^2 - 2\right) \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = 2e^{-2x}\left(x - x^2 + 2\right) = 0 \;\Rightarrow\; -x^2 + x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1,\; x = 2.$$ Se tiene:

| f' < 0 | | f' > 0 | | f' < 0 |
|---|---|---|---|---|
| | −1 | | 2 | |

Es decir, la función es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ y creciente en $(-1, 2)$.

Puesto que se trata de una función continua $\forall x$, en $x = -1$ hay un mínimo relativo con $f(-1) = -e^2$ y en $x = 2$ hay un máximo relativo con $f(2) = 2 \cdot e^{-4} = \dfrac{2}{e^4}$.

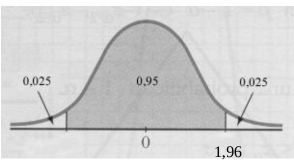
**3.** *En una determinada comunidad autónoma se sabe que la desviación típica del número de días que dura un contrato temporal es igual a 57 días. Diga el número mínimo de contratos en los que se ha de mirar su duración para que el intervalo, con un nivel de confianza del 95%, que da la duración media de un contrato de ese tipo tenga una amplitud que no sea mayor que 10 días. Especifique los pasos realizados para obtener el resultado.* *(10 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

Se trata de obtener el tamaño mínimo de una muestra en una población cuyos datos son la duración de los contratos temporales y de la que se conoce: la desviación típica, $\sigma = 57$ días, y el radio del intervalo de confianza de la media (error máximo admisible), $E = 5$ días (la mitad de la amplitud), para un nivel de confianza del 95%.

Se tiene: $\quad E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$

Calculemos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ para el nivel de confianza del 95%:




$1 - \alpha = 0{,}95 \;\Rightarrow\; \alpha = 0{,}05 \;\Rightarrow\; \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}025 \;\Rightarrow\; 1 - 0{,}025 = 0{,}975$

y mirando la tabla: $\quad F(1{,}96) = 0{,}975 \;\Rightarrow\; z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Tenemos: $\quad n = \left(\dfrac{1{,}96 \cdot 57}{5}\right)^2 = 499{,}25 \;\Rightarrow\;$ el nº mínimo de contratos que deben revisarse es de 500.