Septiembre 2006

OPCIÓN A

1. *Se consideran las matrices* $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}4 & 20\\ 16 & 5\end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2 y $\left(A^2\right)^{-1}$. *(5 puntos)*

b) Despeje X de la ecuación matricial $A^2\cdot X=B$. *(2 puntos)*

c) *Calcule X.* *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}7 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{7F_2-3F_1}{\approx}\left(\begin{array}{cc|cc}7 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 25 & -3 & 7\end{array}\right)\overset{25F_1-F_2}{\approx}\left(\begin{array}{cc|cc}175 & 0 & 28 & -7\\ 0 & 25 & -3 & 7\end{array}\right)\overset{F_1:175;\ F_2:25}{\approx}\left(\begin{array}{cccc}1 & 0 & \frac{28}{175} & -\frac{7}{175}\\ 0 & 1 & -\frac{3}{25} & \frac{7}{25}\end{array}\right)$$

Luego $\left(A^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{25} & -\frac{1}{25}\\ -\frac{3}{25} & \frac{7}{25}\end{pmatrix}$

b) $A^2\cdot X=B\ \Leftrightarrow\ \left(A^2\right)^{-1}\cdot A^2\cdot X=\left(A^2\right)^{-1}\cdot B\ \Leftrightarrow\ I\cdot X=\left(A^2\right)^{-1}\cdot B\ \Leftrightarrow\ X=\left(A^2\right)^{-1}\cdot B$

c) $X=\begin{pmatrix}\frac{4}{25} & -\frac{1}{25}\\ -\frac{3}{25} & \frac{7}{25}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 20\\ 16 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

2. *Se considera la función* $f(x)=\dfrac{x^2}{a-bx}$ *siendo a y b parámetros reales.*

a) Determine los valores de los parámetros a y b para los que $f(2)=-4$ *y la recta tangente a la gráfica de f(x) en* $x=6$ *es horizontal.* *(4 puntos)*

b) Para $a=1$ *y* $b=-1$.

b_1) Razone cuál es el dominio de f(x) y la existencia de asíntotas verticales. *(2 puntos)*

b_2) Determine los intervalos de concavidad y de convexidad y los puntos de inflexión de f(x) *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) X $f(2)=-4\ \Rightarrow\ \dfrac{4}{a-2b}=-4\ \Rightarrow\ a-2b=-1\ \Rightarrow\ a=2b-1$ (*)

$f'(x)=\dfrac{2x\,(a-bx)+bx^2}{(a-bx)^2}=\dfrac{2ax-bx^2}{(a-bx)^2}$

X Tangente en x = 6, horizontal: $f'(6)=0\ \Rightarrow\ \dfrac{12a-36b}{(a-6b)^2}=0\ \Rightarrow\ 12a-36b=0\ \Rightarrow\ a=3b$ (*)

De las igualdades (*): $2b - 1 = 3b \;\Rightarrow\; b = -1 \;\Rightarrow\; a = -3$

b) La función es $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

b$_1$) Siendo una función racional, el dominio está formado por los valores de x que no anulen el denominador. Es decir: $D(f) = \Re - \{-1\}$.

La recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la función pues $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{1+x} = \infty$

b$_2$) $f'(x) = \dfrac{2x\,(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \dfrac{2x + 2x^2 - x^2}{(1+x)^2} = \dfrac{2x + x^2}{(1+x)^2}$

$$f''(x) = \frac{(2+2x)\cdot(1+x)^2 - (2x + x^2)\cdot 2\,(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2 + 2x + 2x + 2x^2 - 4x - 2x^2}{(1+x)^3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$\forall x \in (-\infty,\ -1)$: $f'' < 0 \;\Rightarrow$ la función es convexa en el intervalo $(-\infty,\ -1)$.
$\forall x \in (-1,\ \infty)$: $f'' > 0 \;\Rightarrow$ la función es cóncava en el intervalo $(-1,\ \infty)$

La función no tiene puntos de inflexión pues aunque pasa de convexa a cóncava en $x = -1$, este punto no pertenece al dominio de la función.

3. *De una baraja española de 40 cartas se retiran los oros y los ases. De las 27 cartas que quedan se extraen dos cartas al azar (sin devolver la primera), calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Ambas son del mismo palo. *(3 puntos)*
b) Al menos una es figura. *(4 puntos)*
c) Únicamente la segunda carta es una figura. *(3 puntos)*

SOLUCÓN.

En la baraja quedan 9 cartas de copas, 9 de espadas y 9 de bastos. La extracción de la segunda carta está condicionada por la primera extracción al ser sin devolución.

a) Puesto que la composición de la baraja es homogénea en cuanto a los tres palos que quedan, la probabilidad de que las dos cartas sean de copas, de espadas o de bastos es la misma. Sea P_1 el suceso "la primera carta es de un determinado palo" y P_2 el suceso "la segunda carta es del mismo palo". Se tiene:

$$p(\text{mismo palo}) = 3 \cdot p(P_1 \cap P_2) = 3 \cdot p(P_1) \cdot p(P_2 / P_1) = 3 \cdot \frac{9}{27} \cdot \frac{8}{26} = \frac{8}{26} = \frac{4}{13} \cong 0{,}3077$$

b) El suceso "al menos una carta es figura" es el suceso contrario al A = "ninguna de las dos cartas es figura". Sea F_1 el suceso "la primera carta es una figura" y F_2 el suceso "la segunda carta es una figura"

$$p(A) = p(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = p(\overline{F_1}) \cdot p(\overline{F_2} / \overline{F_1}) = \frac{18}{27} \cdot \frac{17}{26} = \frac{17}{39} \;\Rightarrow\; p(\overline{A}) = 1 - \frac{17}{39} = \frac{22}{39} \cong 0{,}5641$$

c) Nos piden: $p(\overline{F_1} \cap F_2) = p(\overline{F_1}) \cdot p(F_2 / \overline{F_1}) = \dfrac{18}{27} \cdot \dfrac{9}{26} = \dfrac{3}{13} \cong 0{,}23$

Septiembre 2006

OPCIÓN B

1. *Sean* $T=\{(x\,,\ y)\ /\quad y+3x\geq 6\ ,\quad y+1\leq 0\ ,\quad 8x-3y\leq 67\ \}$ *y* $f(x\,,\ y)=3y-8x$

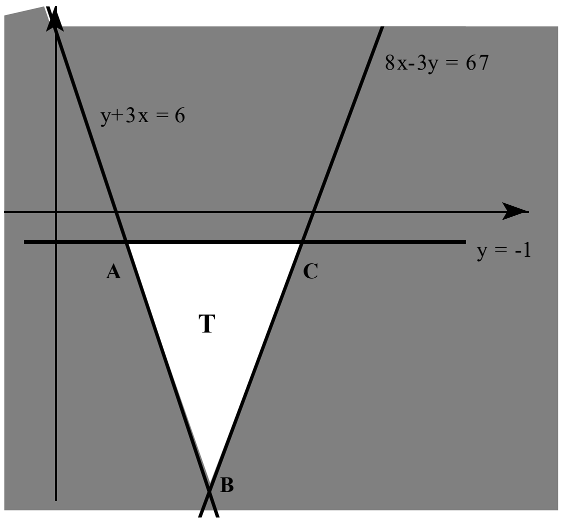
a) Represente gráficamente la región T. *(3,5 puntos)*

b) Calcule el valor máximo y el mínimo, si existen, de la función $f(x\,,\ y)$ *en T y diga en qué puntos se alcanzan.* *(4 puntos)*

c) Represente gráficamente la región $S=\{(x\,,\ y)\ /\quad y+3x\geq 6\ ,\quad y+1\leq 0\}$ *y calcule el valor máximo y el mínimo, si existen, de la función* $f(x\,,\ y)$ *en S y diga en qué puntos se alcanzan.* *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Representemos el semiplano solución de cada una de las inecuaciones. La intersección de todos ellos es la región T.



X $y+3x=6$ es la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(2\,,\ 0)$ y $(0\,,\ 6)$. El semiplano solución de la inecuación es el que no contiene al origen de coordenadas.

X $y+1=0\Leftrightarrow y=-1$ es la recta paralela al eje OX que pasa por el punto $(0\,,\ -1)$. El semiplano solución de la inecuación es el que no contiene al origen de coordenadas.

X $8x-3y=67$ es una recta que pasa por los puntos $(5\,,\ -9)$ y $(8\,,\ -1)$, por ejemplo. El semiplano solución de la inecuación es el que contiene al origen de coordenadas.

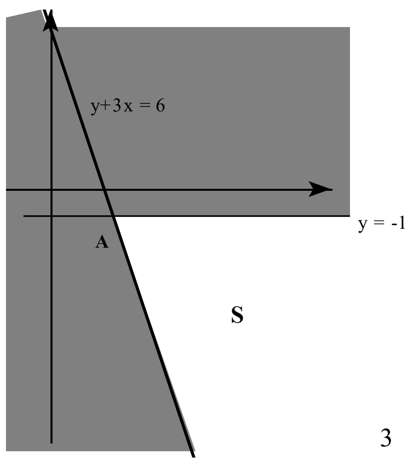
La región T es la parte del plano que queda en blanco. Se trata de un triángulo de vértices:

Vértice A: $\begin{cases} y=-1 \\ y+3x=6 \end{cases}\ \Rightarrow\ A\left(\frac{7}{3}\ ,\ -1\right)$

B: $\begin{cases} y+3x=6 \\ 8x-3y=67 \end{cases}\ \Rightarrow\ 8x-3(6-3x)=67\ \Rightarrow\ 8x-18+9x=67\ \Rightarrow\ 17x=85\ \Rightarrow\ x=5\ ,\ y=-9\ \Rightarrow\ B(5\,,\ -9)$

C: $\begin{cases} y=-1 \\ 8x-3y=67 \end{cases}\ \Rightarrow\ 8x+3=67\ \Rightarrow\ 8x=64\ \Rightarrow\ x=8\ ,\ y=-1\ \Rightarrow\ C(8\,,\ -1)$

b) La función objetivo $f(x\,,\ y)=3y-8x$ se maximiza o minimiza en alguno de los vértices de T. Veamos qué valores alcanza la función en dichos vértices:



En A: $f\left(\frac{7}{3}\ ,\ -1\right)=-3-\frac{56}{3}=-\frac{65}{3}$; En B: $f(5\,,\ -9)=-27-40=-67$

En C: $f(8\,,\ -1)=-3-64=-67$

Por tanto, el mayor valor lo alcanza en $A\left(\frac{7}{3}\ ,\ -1\right)$ y el mínimo en cualquiera de los puntos del segmento BC.

c) Ahora, la región S es abierta con un único vértice $A\left(\frac{7}{3}\ ,\ -1\right)$ en el que la función alcanza el máximo. El mínimo no se alcanza nunca.

2. *En una factoría la función de costes es* $C(x) = x^3 - 3 \cdot \ln x$ *, donde* $x > 0$ *es el número de toneladas que se producen.*

a) Calcule el coste mínimo, si existe, y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste. *(5 puntos)*

b) Si la función de ingresos es $I(x) = x^3 + 12x$ *escriba la función de beneficios.* *(1 punto)*

c) Calcule los intervalos en los que la función de beneficios es creciente o decreciente y diga si existe beneficio máximo y en caso afirmativo el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho beneficio. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $C'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x} = \frac{3x^3 - 3}{x} = 0 \;\Rightarrow\; 3x^3 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x^3 = 1 \;\Rightarrow\; x = 1$ (valor crítico)

$C''(x) = \frac{9x^3 - 3x^3 + 3}{x^2} = \frac{6x^3 + 3}{x^2} \;\Rightarrow\; C''(1) > 0 \;\Rightarrow\;$ Para $x = 1$ los costes son mínimos.

Por tanto, se ha de producir 1 tonelada y el coste es de $C(1) = 1 - 3 \cdot 0 = 1$

b) La función de beneficios es: $B(x) = I(x) - C(x) = x^3 + 12x - x^3 + 3 \cdot \ln x = 12x + 3 \cdot \ln x$

c) $B'(x) = 12 + \frac{3}{x} = \frac{12x + 3}{x} = 0 \;\Rightarrow\; 12x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{4}$ que no forma parte del dominio de la función pues x debe ser mayor que 0.

Como para $x > 0$, $B'(x) > 0 \Rightarrow$ la función de beneficios es siempre creciente.

3. *En una gran ciudad se ha preguntado a 625 personas el gasto efectuado en medicinas el pasado año, obteniéndose un gasto medio de 75 euros. Se sabe que la desviación típica de esta variable es igual a 50. Calcule el intervalo que da el gasto medio con un nivel de confianza del 95%. Especifique los pasos realizados para obtener el resultado.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

Se tiene una muestra de 625 personas (n = 625) en la que la media muestral es $\overline{x} = 75$ euros. La desviación típica poblacional es $\sigma = 50$ euros.

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ con lo que el intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad , \quad \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(75 - 1{,}96 \cdot \frac{50}{\sqrt{625}} \quad , \quad 75 + 1{,}96 \cdot \frac{50}{\sqrt{625}} \right) = \left(71{,}08 \ , \quad 78{,}92 \right)$$

Es decir, la media de la población está entre 71,08 euros y 78,92 euros con un nivel de confianza del 95%.