Junio 2005.

OPCIÓN A

1. *En un taller de joyería se fabrican collares con 50, 75 y 85 perlas y para ello se utilizan en su totalidad 17500 perlas y 240 cierres.*

a) ¿Cuántos collares de cada tamaño se han de fabricar si se desean tantos collares de tamaño mediano como la media aritmética del número de collares grandes y pequeños? *(6 puntos)*
b) Sin tener en cuenta la condición del apartado anterior, ¿es posible fabricar el mismo número de collares de cada tamaño? *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sea x el número de collares con 50 perlas, y el número de collares con 75 perlas, z el número de collares con 85 perlas.

a) Como se utiliza un cierre por cada collar, se tiene: $x+y+z=240$ (*)
El número de perlas utilizadas es: $50x+75y+85z=17500$ (*)
Como y debe ser igual a la media aritmética de x y z: $y=\dfrac{x+z}{2} \Leftrightarrow x-2y+z=0$ (*)

Las igualdades (*) forman un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que vamos a resolver por el método de Gauss. Las matrices de los coeficientes y ampliada son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 50 & 75 & 85 & 17500 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 10 & 15 & 17 & 3500 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 0 & 5 & 7 & 1100 \\ 0 & -3 & 0 & -240 \end{array}\right) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 240 \\ 0 & 5 & 7 & 1100 \\ 0 & 0 & 21 & 2100 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x=60 \\ y=80 \\ z=100 \end{array}$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $\dfrac{F_2}{5}$ (2) F_2-10F_1 ; F_3-F_1 (3) $5F_3+3F_2$

Luego se han de fabricar 60 collares de 50 perlas, 80 de 75 perlas y 100 collares de 85 perlas.

b) Al eliminar la tercera condición, el sistema es de dos ecuaciones con tres incógnitas. El sistema escalonado equivalente es:

$$\begin{cases} x+y+z=240 \\ 5y+7z=1100 \end{cases}$$

Si es posible fabricar el mismo número de collares de cada tamaño, debe ser $x=y=z$, es decir: $\begin{cases} 3z=240 \\ 12z=1100 \end{cases}$ y cada una de las dos ecuaciones da un valor de z distinto. La conclusión es que no se puede fabricar el mismo número de collares de cada tamaño pues son incompatibles las condiciones sobre el total de cierres y el total de perlas.

2. *Se considera la función* $f(x)=a\ln x+x^3$*, siendo a un parámetro real.*

a) Escriba el dominio de definición de f(x). *(0,75 puntos)*
b) Compruebe si hay algún valor de a para el que f(x) tiene punto de inflexión en x = 1. *(3,25 puntos)*
c) Para $a=-3$ *calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de la función f(x).* *(3,5 puntos)*
d) Para a = 1 calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

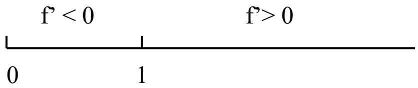
a) El dominio de f(x) es el de $y = \ln x$: $D(f) = (0, +\infty)$

b) Para que la función tenga un punto de inflexión en x = 1 debe ser $f''(1) = 0$:

Se tiene: $f'(x) = \frac{a}{x} + 3x^2 \Rightarrow f''(x) = -\frac{a}{x^2} + 6x \Rightarrow f''(1) = -a + 6 = 0 \Rightarrow a = 6$

c) Para a = -3, la función es: $f(x) = -3 \ln x + x^3$. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada: $f'(x) = -\frac{3}{x} + 3x^2$

Se tiene: $-\frac{3}{x} + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = \frac{3}{x} \Rightarrow 3x^3 = 3 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$ es decir:



luego es decreciente en $(0, 1)$ y creciente en $(1, \infty)$.

La función tiene un posible máximo o mínimo en x = 1. Como $f''(x) = \frac{3}{x^2} + 6x \Rightarrow f''(1) > 0 \Rightarrow$ la función tiene un mínimo relativo en x = 1.

También se podría haber argumentado así: f(x) es una función continua que es decreciente hasta x = 1 y creciente a partir de x = 1 por lo que debe tener un mínimo relativo en ese punto.

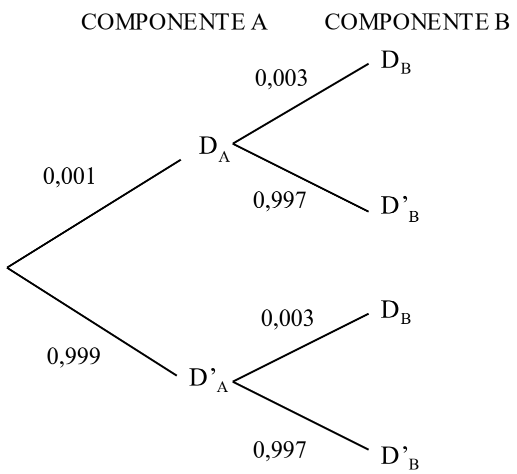
d) La función es ahora: $f(x) = \ln x + x^3$. Se tiene: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln x + x^3\right) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \left(\ln x + x^3\right) = -\infty$

3. *Una fábrica produce un elemento mecánico ensamblando dos componentes A y B. Se sabe que la probabilidad de que el componente A sea defectuoso es de 0'001 y la de que B no lo sea es de 0'997. Se elige al azar un elemento, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Solamente el componente A es defectuoso. *(2,5 puntos)*
b) Ninguno de los componentes es defectuoso *(2,5 puntos)*
c) Ambos componentes son defectuosos. *(2,5 puntos)*
d) Solamente uno de los componentes es defectuoso. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Organicemos todas las situaciones posibles mediante un diagrama en árbol:



Sean: D_A el suceso "el componente A es defectuoso", D'_A el suceso "el componente A no es defectuoso, D_B el suceso "el componente B es defectuoso" y D'_B el suceso "el componente B no es defectuoso". Se tiene:

a) $p(D_A \cap D'_B) = 0{,}001 \cdot 0{,}997 = 0{,}000997$

b) $p(D'_A \cap D'_B) = 0{,}999 \cdot 0{,}997 = 0{,}996003$

c) $p(D_A \cap D_B) = 0{,}001 \cdot 0{,}003 = 0{,}000003$

d) $p\left[(D_A \cap D'_B) \cup (D'_A \cap D_B)\right] =$

$= p(D_A \cap D'_B) + p(D'_A \cap D_B) =$

$= 0{,}001 \cdot 0{,}997 + 0{,}999 \cdot 0{,}003 = 0{,}003994$

Junio 2005

OPCIÓN B

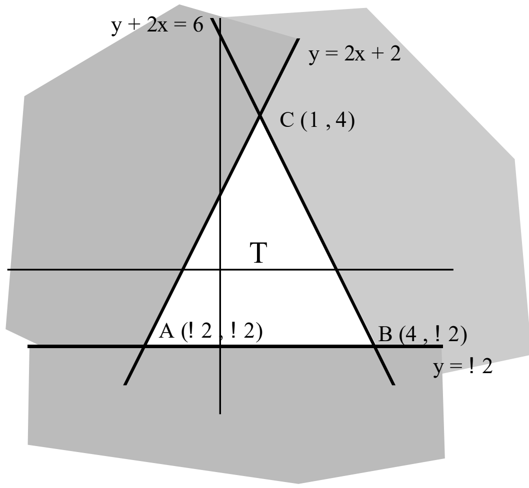
1. *Sea T la región del plano determinada por las siguientes inecuaciones:* $-2 \le y \qquad y \le 2x + 2 \qquad y + 2x \le 6$

a) Representa gráficamente la región T. *(2 puntos)*

b) Se considera la función $f(x, y) = \dfrac{2x - y}{2}$. *Calcule, si existen, los puntos* (x, y) *que dan el valor máximo de* $f(x, y)$ *y los que dan el valor mínimo de* $f(x, y)$ *en T.* *(3,5 puntos)*

c) Calcule las respuestas del apartado anterior si en T se cambia la desigualdad $y \le 2x + 2$ *por* $x \ge 2$. *(4,5 puntos)*

SOLUCIÓN.



a) XLa inecuación $-2 \le y$ tiene por solución los puntos del semiplano superior limitado por la recta $y = -2$.

X La recta $y = 2x + 2$ pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(-1, 0)$. El semiplano solución de la inecuación $y \le 2x + 2$ es el que contiene al origen de coordenadas, pues: $0 \le 0 + 2$.

X La recta $y + 2x = 6$ pasa por los puntos $(0, 6)$ y $(3, 0)$. El semiplano solución de la inecuación $y + 2x \le 6$ es el que contiene al origen de coordenadas, pues: $0 \le 6$.

La región T es el triángulo de vértices A, B y C.

b) La función objetivo $f(x, y) = \dfrac{2x - y}{2}$ se maximiza o minimiza en los vértices de la región T. Obtengamos las coordenadas de dichos vértices y el valor de la función en cada uno de ellos:

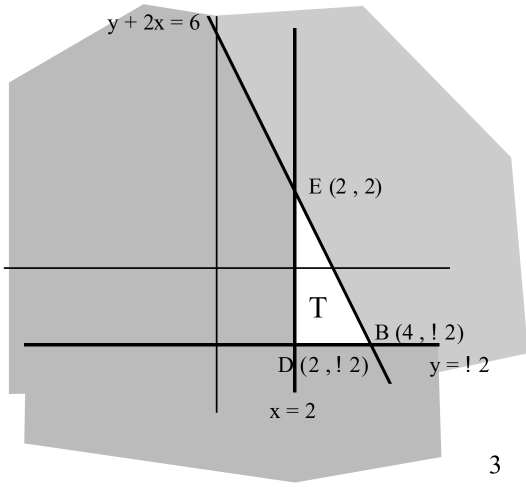
X El vértice A es el punto de corte de las rectas $y = 2x + 2$ y $y = -2$: $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow A(-2, -2) \Rightarrow$

$$f(-2, -2) = \frac{-4 + 2}{2} = -1$$

X Las coordenadas del vértice B son las soluciones del sistema $\begin{cases} y = -2 \\ y + 2x = 6 \end{cases} \Rightarrow B(4, -2) \Rightarrow f(4, -2) = 5$

X Las coordenadas de C son las soluciones del sistema $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y + 2x = 6 \end{cases} \Rightarrow C(1, 4) \Rightarrow f(1, 4) = -1$

Por tanto, a la vista de los resultados, la función es máxima en el punto $B(4, -2)$ y mínima en cualquier punto del segmento AC.



c) Al cambiar la desigualdad $y \le 2x + 2$ por la $x \ge 2$, la región T es ahora:

X El vértice D es $D(2, -2) \Rightarrow f(2, -2) = 3$
X El vértice B es $B(4, -2) \Rightarrow f(4, -2) = 5$
X El vértice E es $E(2, 2) \Rightarrow f(2, 2) = 1$

luego la función es máxima en el punto $B(4, -2)$ y mínima en el punto $E(2, 2)$.

2. *Se sabe que la función de beneficios de una empresa es de la forma $B(x) = ax + b\sqrt{x}$, siendo x el número de unidades producidas y a y b parámetros reales.*

a) Calcule, si existen, los valores de los parámetros a y b para que una producción de x = 100 proporcione un beneficio de 50 unidades monetarias y que además sea el máximo que se puede obtener. *(6 puntos)*
b) Para $a = -1$ y $b = 16$, calcule las cantidades que se han de producir para que el beneficio aumente o disminuya (intervalos de crecimiento y decrecimiento) y los puntos de inflexión de B(x), si existen. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se tiene: $B(100) = 50 \Rightarrow 50 = 100a + 10b$ (*)
Como, además, es el máximo: $B'(100) = 0$.
Se tiene: $B'(x) = a + \dfrac{b}{2\sqrt{x}} \Rightarrow B'(100) = a + \dfrac{b}{20} = 0 \Rightarrow 20a + b = 0$ (*)

De las ecuaciones (*) se obtiene: $\begin{cases} 100a + 10b = 50 \\ 20a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + b = 5 \\ 20a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\dfrac{5}{10} = -\dfrac{1}{2}$ y $b = 10$

b) La función es: $B(x) = -x + 16\sqrt{x}$. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada: $B'(x) = -1 + \dfrac{16}{2\sqrt{x}} = -1 + \dfrac{8}{\sqrt{x}}$.

Igualamos a cero la derivada: $-1 + \dfrac{8}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow -\sqrt{x} + 8 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 8 \Rightarrow x = 64$. Se tiene:

f' > 0 f' < 0
64

Es decir, la función beneficio es creciente (aumenta) hasta x = 64 y es decreciente (disminuye) desde x = 64.

Los puntos de inflexión satisfacen $B''(x) = 0$. En nuestro caso: $B''(x) = 0 + \dfrac{-8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{-4}{x\sqrt{x}}$ que es distinto de 0 para todo valor de x. Por tanto, la función no tiene puntos de inflexión.

3. *En una gran ciudad la desviación típica del gasto medio semanal de los jóvenes es de 6 euros. Elegidos 100 jóvenes, su gasto medio semanal es de 25 euros. Determine el intervalo de confianza del 95% para dicho gasto medio, explicando los pasos realizados para obtener el resultado.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

El radio del intervalo es $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. En este caso: $\sigma = 6$ y $n = 100$ por lo que:

$$E = 1{,}96 \cdot \frac{6}{\sqrt{100}} = 1{,}176 .$$

Y, por tanto, el intervalo de confianza es: $(25 - 1{,}176 \ , \ 25 + 1{,}176) = (23{,}824 \ , \ 26{,}176)$, es decir, en un 95% de las muestras, el gasto medio estará entre 23,82 euros y 26,18 euros.