Septiembre 05.

OPCIÓN A

1. *Un agricultor dispone de 9 hectáreas para sembrar dos productos A y B. Para el producto A desea destinar como mucho 8 hectáreas. Por cada hectárea sembrada con A y B se obtiene respectivamente un beneficio de 150 y 100 euros.*

a) Si se quiere que la superficie correspondiente a B no sea mayor que la mitad que ocupará A, plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita averiguar el número de hectáreas que se han de dedicar a cada producto para maximizar el beneficio total. *(6 puntos)*

b) ¿Cuál es la solución si el beneficio por hectárea es de 125 euros independientemente de que esté sembrada con A o con B y no se tiene en cuenta la restricción del apartado a)? *(4 puntos)*

SOLUCIÓN

a) Organicemos los datos y condiciones del problema en una tabla:

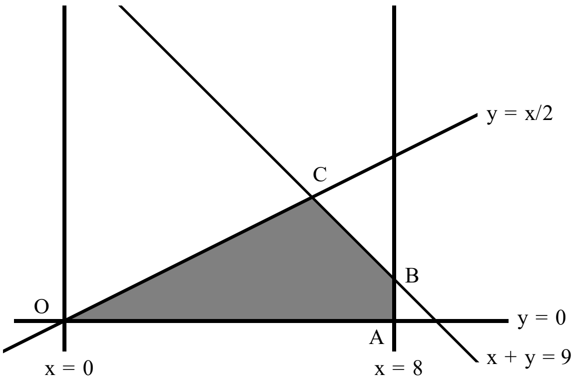
PRODUCTO	**HECTÁREAS**	**BENEFICIO**
A	x	150x
B	y	100y
	$0 \le x \le 8$ $y \ge 0$ $x + y \le 9$ $y \le \frac{x}{2}$	

∃ La función objetivo, que debe maximizarse, es:

$$F(x\,,\,y) = 150x + 100y$$

∃ Las restricciones de la solución son: $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x \le 8 \\ x + y \le 9 \\ y \le \frac{x}{2} \end{cases}$

La región factible (puntos del plano que satisfacen al conjunto de restricciones) es el cuadrilátero OABC:



La función objetivo se optimiza en alguno de los vértices de la región factible. Obtengamos sus coordenadas y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

Vértice O: $O(0\,,0) \Rightarrow F(0\,,0) = 0$ €

Vértice A: $A\,(8\,,0) \Rightarrow F(8,\ 0) = 1200$ €

Vértice B: $\begin{cases} x = 8 \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow B\,(8,\ 1) \Rightarrow F(8,\ 1) = 1300$ €

Vértice C: $\begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow C\,(6,\ 3) \Rightarrow F(6,\ 3) = 1200$ €

Por tanto, para maximizar el beneficio se deben dedicar 8 hectáreas al producto A y 1 hectárea al producto B.

b) Ahora la función objetivo es: $G\,(x\,,\ y) = 125x + 125y$
y las restricciones: $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x \le 8$, $x + y \le 9$

La nueva región factible es el cuadrilátero OABD. Sus vértices y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos son:

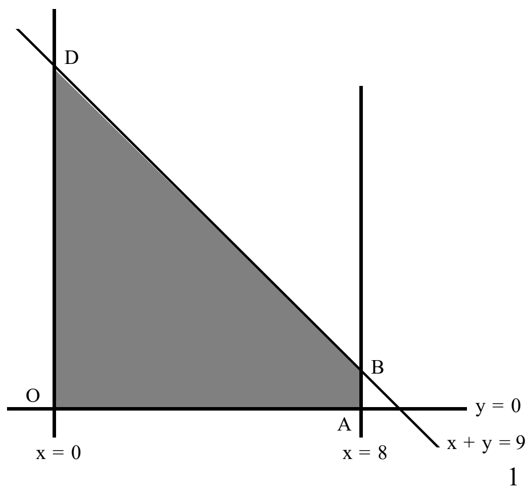
$O(0\,,0) \Rightarrow F(0\,,0) = 0$ €

$A\,(8\,,0) \Rightarrow F(8,\ 0) = 1000$ €

$B\,(8,\ 1) \Rightarrow F(8,\ 1) = 1125$ €

$D(0\,,9) \Rightarrow F(0\,,9) = 1125$ €

Luego la solución es cualquier punto del segmento BD.



2. *Se considera la función* $f(x) = -\frac{x^4}{2} + 5x^3 - 18x^2 + 28x + 9$

a) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos *(4,75 puntos)*
b) Determine los intervalos de concavidad y de convexidad y los puntos de inflexión. *(3,75 puntos)*
c) Escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto x = 1. *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Como van a ser utilizadas a lo largo del ejercicio, obtengamos las sucesivas derivadas de la función:

$$f'(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 28 \quad , \quad f''(x) = -6x^2 + 30x - 36 \quad , \quad f'''(x) = -12x + 30$$

a) Como la función es continua por ser polinómica, los intervalos de crecimiento y decrecimiento están separados por los puntos de máximo y de mínimo:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -2x^3 + 15x^2 - 36x + 28 = 0 \;\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\; -2\cdot(x-2)^2\cdot\left(x - \frac{7}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \;,\; x = \frac{7}{2} \quad \text{(puntos críticos)}$$

(1)	B2	15	B36	28
2		B4	22	B28
	B2	11	B14	0

Ψ

$$-2x^3 + 15x^2 - 36x + 28 = (x-2)\cdot\left(-2x^2 + 11x - 14\right) =$$
$$= (x-2)\cdot(-2)\cdot(x-2)\cdot\left(x - \frac{7}{2}\right) = -2\cdot(x-2)^2\cdot\left(x - \frac{7}{2}\right)$$

$f''(2) = 0$, $f''(2) \neq 0$ $\Rightarrow$ en x = 2 la función tiene un punto de inflexión

$f''\left(\frac{7}{2}\right) = -6\cdot\frac{49}{4} + 30\cdot\frac{7}{2} - 36 = -\frac{147}{2} + \frac{210}{2} - \frac{72}{2} = -\frac{9}{2} < 0 \;\Rightarrow\;$ en $x = \frac{7}{2}$ la función tiene un máximo relativo.

Por tanto, en $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$ la función es creciente y en $\left(\frac{7}{2}, \infty\right)$ es decreciente.

b) Los posibles puntos de inflexión anulan la segunda derivada: $-6x^2 + 30x - 36 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2 \;,\; x = 3$. Se tiene:

$f'' < 0$		$f'' > 0$		$f'' < 0$
Convexa	2	Cóncava	3	Convexa

En x = 2 y x = 3 la función tiene sendos puntos de inflexión pues $f'''(2) \neq 0$ y $f'''(3) \neq 0$

c) La pendiente es $f'(1) = 5$ y además pasa por el punto de tangencia, cuyas coordenadas son: $x = 1$, $y = f(1) = \frac{47}{2}$

luego la ecuación es: $y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \;\Leftrightarrow\; y - \frac{47}{2} = 5\cdot(x-1) \;\Leftrightarrow\; 10x - 2y + 37 = 0$

3. *En un Instituto de Idiomas se expiden dos certificados: el A (de nivel básico) y el B (de nivel superior). Para su obtención es necesario pasar una prueba o examen, pudiendo una persona presentarse a la prueba del B aunque no tenga el certificado A. Se sabe que la prueba para el certificado B la pasan 80 de cada 100 personas que tienen el A y 40 de cada 100 que no lo tienen. Dos amigos se presentan a la prueba para obtener el certificado B, uno tiene el A y el otro no. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Ambos obtienen el certificado. *(2,5 puntos)*
b) Solamente obtiene el certificado el que ya tiene el A. *(2,5 puntos)*
c) Solamente obtiene el certificado el que no tiene el A. *(2,5 puntos)*
d) Solamente uno obtiene el certificado. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $p\,(B/A \text{ I } B/\overline{A}) = p\,(B/A)\cdot p\left(B/\overline{A}\right) = 0{,}8\cdot 0{,}4 = 0{,}32$

b) $p\,(B/A \text{ I } \overline{B}/\overline{A}) = p\,(B/A)\cdot p\left(\overline{B}/\overline{A}\right) = 0{,}8\cdot 0{,}6 = 0{,}48$

c) $p\left(\overline{B}/A \text{ I } B/\overline{A}\right) = p\left(\overline{B}/A\right)\cdot p\left(B/\overline{A}\right) = 0{,}2\cdot 0{,}4 = 0{,}08$

d) $p\left(B/A \text{ I } \overline{B}/\overline{A}\right) + p\left(\overline{B}/A \text{ I } B/\overline{A}\right) = 0{,}48 + 0{,}08 = 0{,}56$

Septiembre 05.

OPCIÓN B

1. *a) Mediante cálculo matricial, discuta y resuelva el sistema:* $\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 2x + 7y - 3z = 5 \end{cases}$ *(5 puntos)*

b) Calcule la matriz X solución de la ecuación $2X + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Escribamos las matrices de los coeficientes y ampliada y apliquemos las transformaciones elementales necesarias para triangularizar las matrices:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & -4 & 8 \end{array}\right) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{el sistema es compatible indeterminado}$$

Transformaciones elementales utilizadas: (1) $F_2 - F_1$, $F_3 - F_1$ (2) F_3 ! $2F_2$

El sistema escalonado equivalente al dado es: $\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ 2y - z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 - \lambda \\ 2y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{2+\lambda}{2}$;

$2x = -3 - \lambda + \dfrac{2+\lambda}{2} = \dfrac{-4-\lambda}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{4+\lambda}{4}$. Es decir: $x = -\dfrac{4+\lambda}{4}$, $y = \dfrac{2+\lambda}{2}$, $z = \lambda$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$

Se tiene: $2X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ 13 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ 13 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{13}{2} & -\dfrac{11}{2} \\ \dfrac{13}{2} & 6 \end{pmatrix}$

2. *Sea* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & si\ x < 0 \\ \dfrac{2x-1}{x+a} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

a) ¿Existe algún valor del parámetro a para el que f(x) sea continua en x = 0? *(2,5 puntos)*

b) Para $a = \dfrac{1}{2}$*, calcule los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de f(x).* *(6 puntos)*

c) Para a = 2, compruebe si $x = \dfrac{1}{2}$ *es asíntota vertical de f(x).* *(1,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Para que la función sea continua en x = 0 debe ocurrir:

∃ $\exists\ f(0) = -\dfrac{1}{a}$

∃ $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-2\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-1}{x+a} \Leftrightarrow -2 = -\dfrac{1}{a} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

∃ Para este valor del parámetro, se tiene: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ es decir, la función es continua en x = 0.

b) La función es: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x-1}{x+\frac{1}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

La función derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f' < 0$		$f' > 0$
DECRECIENTE	0	CRECIENTE

La función segunda derivada: $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{4}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f'' > 0$		$f'' < 0$
CÓNCAVA	0	CONVEXA

c) La función es: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x-1}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

La recta $x = \dfrac{1}{2}$ no es una asíntota vertical de la función porque: $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{x+2} = 0$

3. *Se ha obtenido que el intervalo de confianza correspondiente al 95% de una variable es* $(6'66\,,\ 8'34)$. *Calcule la media y el tamaño de la muestra que se ha estudiado para obtener el intervalo sabiendo que la desviación típica es igual a 3. Explique cada uno de los pasos realizados.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La media es el valor central del intervalo: $\overline{X} = \dfrac{6{,}66 + 8{,}34}{2} = 7{,}5$

El radio del intervalo (error máximo admitido) es: $E = 7{,}5 - 6{,}66 = 0{,}84$

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es: $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Se tiene: $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0{,}84 = 1{,}96 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0{,}84 \cdot \sqrt{n} = 5{,}88 \Rightarrow \sqrt{n} = 7 \Rightarrow n = 49$