**Junio 2004.**

**OPCIÓN A.**

**1.** *Se consideran las matrices* $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$

*a) Calcular AB y BA.* *(4 puntos)*

*b) Discutir si existe solución del sistema* $AB\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 5\\ 0\end{pmatrix}$. *En caso afirmativo, resolverlo utilizando el método de Gauss.* *(6 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -4\\ -3 & -8 & -10\\ 2 & 7 & 0\end{pmatrix}$ $\qquad B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -11 & -3\end{pmatrix}$

b) La matriz de los coeficientes ampliada con los términos independientes es: $\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & -4 & 2\\ -3 & -8 & -10 & 5\\ 2 & 7 & 0 & 0\end{array}\right)$. Calculemos y comparemos sus rangos: $rg\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & -4 & 2\\ -3 & -8 & -10 & 5\\ 2 & 7 & 0 & 0\end{array}\right)\overset{(1)}{=}rg\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 7 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 2\\ -3 & -8 & -10 & 5\end{array}\right)\overset{(2)}{=}rg\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 7 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 5 & -20 & 10\end{array}\right)\overset{(3)}{=}$

$=rg\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 7 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ $\Rightarrow$ rg A = rg B < nº de incógnitas $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

Transformaciones elementales utilizadas: (1) Cambio de orden en las filas. (2) $2F_3+3F_1$ (3) $F_3-5F_2$

El sistema escalonado equivalente es : $\left\{\begin{array}{l}2x+7y \quad\;\; =0\\ \quad\;\; y-4z=2\\ \qquad\;\; 0z=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x+7y=0\\ \quad\; y-4z=2\end{array}\right. \Rightarrow \quad z=\lambda \Rightarrow y=2+4\lambda \Rightarrow$

$x=-\dfrac{7y}{2}=-\dfrac{14+28\lambda}{2}=-7-14\lambda$ es decir: $\boxed{x=-7-14\lambda\ ,\ y=2+4\lambda\ ,\ z=\lambda}$

**2.** *Sea* $f(x)=\begin{cases}x^3-3x+2 & \text{si } x<3\\ \dfrac{10}{a-x} & \text{si } x\ge 3\end{cases}$

*a) Calcular los valores del parámetro a para los que f(x) es continua en x = 3.* *(2,5 puntos)*
*b) Para a = 0, calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).* *(4,5 puntos)*
*c) Para a = 4, calcular las asíntotas verticales y horizontales de f(x).* *(3 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) Para que la función sea continua debe suceder:

X $\exists f(3)=\dfrac{10}{a-3}$

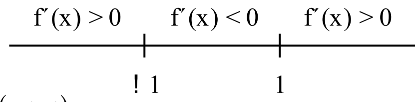
X $\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\left(x^3-3x+2\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{10}{a-x} \Rightarrow 20=\dfrac{10}{a-3} \Rightarrow a=\dfrac{7}{2}$

X Además, para este valor de a se verifica que $f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ por lo que la función es continua.

b) La función ahora es: $f(x)=\begin{cases} x^3-3x+2 & \text{si } x<3 \\ -\dfrac{10}{x} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$ y su función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 3x^2-3 & \text{si x} < 3 \\ \dfrac{10}{\text{x}^2} & \text{si x} \geq 3 \end{cases}$

El crecimiento y decrecimiento dependen del signo de f´(x):

X Para x < 3, la función derivada es $f'(x)=3(x+1)(x-1) \Rightarrow$




luego la función es creciente en $(-\infty,-1)\cup(1,3)$ y decreciente en $(-1,1)$

X Para x ∃ 3, la función derivada es siempre positiva por lo que la función es creciente en $(3,\infty)$

c) La función es: $f(x)=\begin{cases} x^3-3x+2 & \text{si } x<3 \\ \dfrac{10}{4-x} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$.

X Para x < 3, la función no tiene asíntotas porque es polinómica.
X Para x ∃ 3:

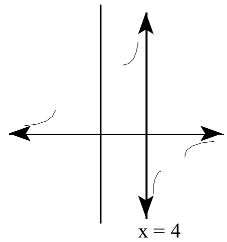
- la función tiene una asíntota vertical de ecuación x = 4 porque $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\infty$. Además:

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{10}{4-x}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 4^+}\frac{10}{4-x}=-\infty$$

- El eje de abscisas y = 0 es una asíntota horizontal de la función pues $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Además:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{10}{4-x}=0^+ \quad , \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{10}{4-x}=0^-$$

por lo que la posición relativa de la curva respecto a sus asíntotas es:

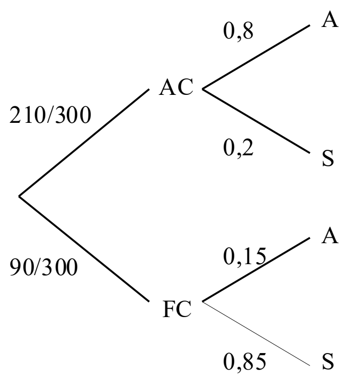



**3.** *En una asignatura de primer curso de una titulación universitaria, asisten a clase, regularmente, 210 alumnos de los 300 que hay matriculados. Además se sabe que aprueban el 80% de los alumnos que asisten a clase y el 15% de los que no asisten. Calcular la probabilidad de los cuatro sucesos siguientes:*

*a) Se elige al azar un alumno matriculado y resulta que:*
*i) Ha asistido a clase.* *(1,5 puntos)*
*ii) No ha asistido a clase y ha aprobado.* *(2 puntos)*
*iii) Ha aprobado.* *(3 puntos)*
*b) Se elige al azar un alumno de entre los que han aprobado y resulta que ha asistido a clase.* *(3,5 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

Confeccionemos el diagrama en árbol (AC = "asiste a clase", FC = "falta a clase", A = "Aprueba", S = "Suspende"):




a) i) $p(AC)=\dfrac{210}{300}=0{,}7$

ii) $p(FC \cap A)=\dfrac{90}{300}\cdot 0{,}15=0{,}3\cdot 0{,}15=0{,}045$

iii) $p(A)=0{,}7\cdot 0{,}8+0{,}3\cdot 0{,}15=0{,}605$

b) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p(AC/A)=\frac{p(AC)\cdot p(A/AC)}{p(AC)\cdot p(A/AC)+p(FC)\cdot p(A/FC)}=\frac{0{,}56}{0{,}605}=0{,}926$$

**Junio 2004.**

## OPCIÓN B.

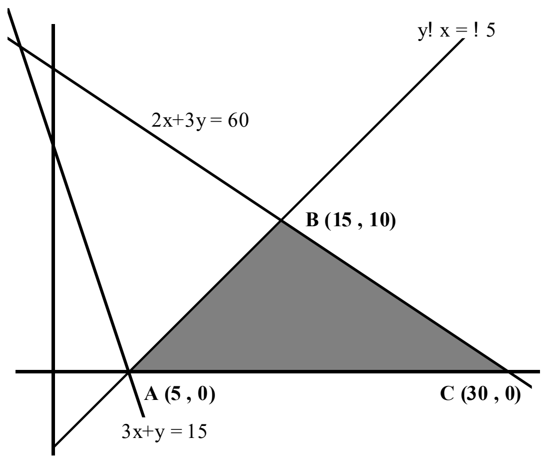
**1.** *Se considera la función* $f(x , y) = x - y$

*a) Representar el conjunto* $A = \{(x , y) \;/\; 3x + y \geq 15 \;,\; y - x \leq -5 \;,\; 2x + 3y \leq 60 \;,\; y \geq 0\}$ *y calcular el valor máximo de f(x , y) en A. ¿Alguna de las desigualdades que definen el conjunto A se podría eliminar de forma que siguiera siendo el mismo conjunto?* *(7 puntos)*

*b) Decir si la función f(x , y) alcanza valor máximo en el conjunto* $B = \{(x , y) \;/\; 3x + y \leq 15 \;,\; x - y \geq 5 \;,\; x \geq 0\}$. *En caso afirmativo, calcular dicho valor.* *(3 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a)




Calculemos las coordenadas de los vértices de la región factible:

Vértice A: $\begin{cases} y = 0 \\ y - x = -5 \end{cases} \Rightarrow A(5 , 0)$

Vértice B: $\begin{cases} y - x = -5 \\ 2x + 3y = 60 \end{cases} \Rightarrow B(15 , 10)$

Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3y = 60 \end{cases} \Rightarrow C(30 , 0)$

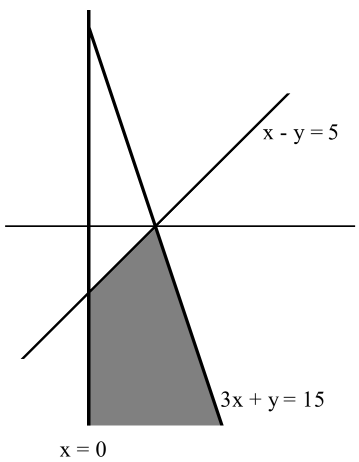
X El valor máximo de la función se alcanza en alguno de los vértices de la región factible:

$$f(5 , 0) = 5 \quad , \quad f(15 , 10) = 5 \quad , \quad f(30 , 0) = 30$$

luego el máximo se alcanza en el punto (30 , 0).

X Se puede eliminar la desigualdad $3x + y \geq 15$ porque no forma parte de la región factible.

b) Representemos gráficamente el conjunto B:




La función no alcanzará un máximo en el conjunto B pues la región es abierta. Cuanto mayor sea la abscisa de un punto de la recta 3x + y = 15 mayor valor alcanzará en él la función f(x , y).

**2.** *Sea* $f(x) = x \cdot e^{-ax}$, *con a un parámetro real.*

*a) Calcular los valores del parámetro a para que f(x) tenga un máximo o un mínimo en x = 3. Para estos valores del parámetro, decir si x = 3 es máximo o mínimo.* *(4 puntos)*

*b) Para a = −2, escribir los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad de f(x).* *(6 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) Si f(x) tiene un máximo o un mínimo en x = 3, debe ser f´(3) = 0: $f'(x) = e^{-ax} + x\,e^{-ax}(-a) = e^{-ax}(1 - ax)$

Se tiene entonces: $f'(3) = e^{-3a}(1 - 3a) = 0 \;\Rightarrow\; 1 - 3a = 0 \;\Rightarrow\; a = \dfrac{1}{3}$

La función, para el valor de a encontrado es: $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{3}x}$ y su derivada: $f'(x) = e^{-\frac{1}{3}x}\left(1 - \dfrac{1}{3}x\right)$

Para saber si se trata de un máximo o de un mínimo, sustituyamos x = 3 en f´´(x):

$$f''(x) = -\frac{1}{3}\,e^{-\frac{1}{3}x}\left(1 - \frac{1}{3}x\right) + e^{-\frac{1}{3}x}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\,e^{-\frac{1}{3}x}\left(2 - \frac{1}{3}x\right) \;\Rightarrow\; f''(3) = -\frac{1}{3}e^{-1}(2 - 1) = -\frac{1}{3e} < 0$$ luego se trata de un máximo.

b) La función es: $f(x) = x \cdot e^{2x}$ y sus derivadas primera y segunda:

$$f'(x) = e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}(1 + 2x) \qquad f''(x) = 2\,e^{2x}(1 + 2x) + e^{2x} \cdot 2 = 2\,e^{2x}(2 + 2x) = 4\,e^{2x}(1 + x)$$

- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 1 + 2x = 0 \quad (\text{pues } e^{2x} > 0) \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{1}{2}$. Se tiene:

| $f' < 0$ | $-1/2$ | $f' > 0$ |
|---|---|---|

luego la función es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$

- Los intervalos de concavidad y convexidad dependen del signo de la segunda derivada:

$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 1 + x = 0 \;\Rightarrow\; x = -1$. Se tiene:

| $f'' < 0$ | $-1$ | $f'' > 0$ |
|---|---|---|

luego la función es convexa en $(-\infty, -1)$ y cóncava en $(-1, \infty)$

**3.** *En un país se selecciona aleatoriamente una muestra de 900 personas. A la salida de los colegios electorales se les preguntó si habían votado al partido político X y 289 contestaron que sí y el resto que no. Determinar un intervalo que nos dé el porcentaje de votos del partido X con un nivel de confianza del 95%, explicando los pasos realizados para su obtención.* *(10 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

La proporción de votantes en la muestra es: $pr = \dfrac{289}{900} = 0{,}32$ y la proporción de no votantes es: $1 - pr = 0{,}68$

Para un nivel de confianza del 95% el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr \cdot (1 - pr)}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}32 \cdot 0{,}68}{900}} = 0{,}03$

Por tanto, el intervalo es: $(pr - E\,,\, pr + E) = (0{,}29\;,\;0{,}35)$ es decir, entre el 29% y el 35%