**Junio 2003.**

## OPCIÓN A.

**1.** *Una empresa edita un libro en dos tipos de formato, "normal" y de "bolsillo". De un ejemplar del primer formato se obtiene un beneficio de 5 unidades monetarias y de un ejemplar del segundo 3. La producción de un ejemplar normal requiere 8 unidades de materia prima y 4 unidades de tiempo y la de bolsillo 4 unidades de materia prima y 3 de tiempo, disponiendo para ello de 800 unidades de materia prima y 480 unidades de tiempo.*

*a) ¿Cuántos ejemplares de cada formato se han de editar para que el beneficio total sea máximo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución.* *(8 puntos)*
*b) Si el beneficio de producir un ejemplar normal fuera de 4 unidades monetarias, ¿cambiaría la solución del apartado anterior?. Razonar la respuesta.* *(2 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) Organicemos en forma de tabla las condiciones que indica el problema:

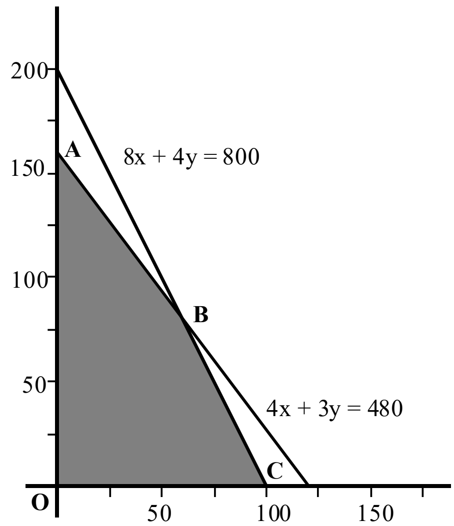
| **Formato** | **Nº ejemplares** | **M. prima** | **Tiempo** | **Beneficio** |
|---|---|---|---|---|
| Normal | x | 8x | 4x | 5x |
| bolsillo | y | 4y | 3y | 3y |
| | ∃ 0 | # 800 | # 480 | F. objetivo |

X La función objetivo (máxima) es:

$$F\,(x\,,\,\mathrm{y}) = 5x + 3y$$

X Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 4y \leq 800 \\ 4x + 3y \leq 480 \end{cases}$

Resolvamos el sistema de inecuaciones para construir la región factible:




Representamos las rectas de ecuaciones $8x + 4y = 800$ y $4x + 3y = 480$.
La región factible (solución del sistema de inecuaciones formado por las restricciones) es el cuadrilátero OABC. Calculemos las coordenadas de sus vértices:

Vértice O: O (0 , 0)

Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 4x + 3y = 480 \end{cases} \Rightarrow A(0\,,160)$

Vértice B: $\begin{cases} 8x + 4y = 800 \\ 4x + 3y = 480 \end{cases} \Rightarrow B(60\,,80)$

Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ 8x + 4y = 800 \end{cases} \Rightarrow C(100\,,0)$

La función objetivo (beneficios) alcanza su máximo en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos el valor de dicha función en cada uno de ellos: $F(0\,,0) = 0$ , $F(0\,,160) = 480$ , $F(60\,,80) = 540$ , $F(100\,,0) = 500$ luego para que el beneficio sea máximo deben editarse 60 ejemplares en formato normal y 80 de bolsillo.

b) Ahora la función objetivo es $F\,(x\,,\,y) = 4x + 3y$. Como las restricciones no se modifican, la región factible es la misma. Veamos cuál es el valor de la nueva función objetivo en los vértices de la región factible:

$$F\,(0\,,0) = 0 \quad , \quad F\,(0\,,160) = 480 \quad , \quad F\,(60\,,80) = 480 \quad , \quad \mathrm{F}\,(100\,,0) = 400$$

a la vista de los resultados, cualquier punto del segmento AB (con coordenadas enteras) será solución del problema.

**2.** *Se considera la función* $f(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x}$*, con a y b parámetros reales.*

*a) Determinar si para a = 1, existe algún valor de b para el que f(x) tenga un mínimo en x = 1.* *(4 puntos)*
*b) Si b = 1, ¿existe algún valor de a para el que f(x) tenga un punto de inflexión en x = 2?* *(3 puntos)*
*c) Para a = 2 y b = 0, calcular* $\int_0^2 f(x)\,dx$ *e interpretar geométricamente el resultado.* *(3 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) La función es: $f(x) = x^2 + \dfrac{b}{x}$ y su función derivada: $f'(x) = 2x - \dfrac{b}{x^2}$

Si f(x) tiene un mínimo en x = 1, debe ser f´(1) = 0: $f'(1) = 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$

b) La función es: $f(x) = ax^2 + \dfrac{1}{x}$ y sus dos primeras funciones derivada: $f'(x) = 2ax - \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 2a + \dfrac{2}{x^3}$

Si f(x) tiene un punto de inflexión en x = 2, debe ser f´´(2) = 0: $f''(2) = 2a + \dfrac{2}{8} = 0 \Rightarrow 16a + 2 = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{8}$

c) La función es: $f(x) = 2x^2$. $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 2x^2\,dx = \left[\dfrac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \dfrac{16}{3}$ es la medida del área limitada por la función f(x), el eje de abscisas y las rectas x = 0 y x = 2.

**3.** *La probabilidad de que un ciudadano conteste a una carta en la que se le ofrece una "multipropiedad" es igual a 0,2. Si recibe a lo largo de un mes 3 cartas, calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:*

*a) Contesta a las tres cartas.* *(2,5 puntos)*
*b) Contesta solamente a la segunda.* *(2,5 puntos)*
*c) No contesta a ninguna carta.* *(2,5 puntos)*
*d) Contesta al menos a una carta.* *(2,5 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

Sea $S_i$ el suceso "contesta a la carta i-ésima" y $N_i$ el suceso "no contesta a la carta i-ésima". Se tiene:

$$p(S_i) = 0{,}2 \;\text{ y }\; p(N_i) = 0{,}8$$

Como los sucesos son independientes:

a) $p(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = p(S_1)\cdot p(S_2)\cdot p(S_3) = 0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2 = 0{,}008$

b) $p(N_1 \cap S_2 \cap N_3) = p(N_1)\cdot p(S_2)\cdot p(N_3) = 0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8 = 0{,}128$

c) $p(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = 0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8 = 0{,}512$

d) El suceso "contesta a alguna carta" es el suceso contrario de "no contesta a ninguna carta", por tanto:

$p$ (contesta a alguna carta) $= 1 - 0{,}512 = 0{,}488$

**NOTA:** El problema se podría haber resuelto teniendo en cuenta de que se trata de una distribución binomial B (3 , 0,2)

**Junio 2003.**

**OPCIÓN B.**

**1.** *Se considera la matriz* $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\\2&5&a\end{pmatrix}$, *siendo a un parámetro real.*

*a) Calcular el rango de A según los valores del parámetro a.* *(3,5 puntos)*

*b) Discutir si existe solución del sistema* $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ *según los valores de a. En caso afirmativo, resolverlo.* *(3,25 puntos)*

*c) Para a = 6, discutir si existe solución del sistema* $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ . *(3,25 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) Utilicemos las transformaciones elementales para conseguir una matriz triangular que tenga el mismo rango que la dada:

$$rg\ A = rg\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\\2&5&\text{a}\end{pmatrix}\overset{(1)}{=} rg\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&1&a-6\end{pmatrix}\overset{(2)}{=} rg\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&a-6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\bullet\ \text{Si a}=6:\ \text{rg A}=2\\ \bullet\ \text{Si a}\neq 6:\ \text{rg A}=3\end{cases}$$

Transformaciones elementales:

(1) $F_2 - F_1$ , $F_3 - F_1$
(2) $F_3 - F_2$

b) Se tiene: $$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\\2&5&\text{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&a-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y+3z=0\\ y=0\\ (a-6)z=0\end{cases}$$

X Si a ≠ 6: el sistema tiene una única solución que es la solución trivial x = y = z = 0
X Si a = 6: el sistema tiene infinitas soluciones: $x=-3\lambda$ , $y=0$ , $z=\lambda$

c) Se tiene: $$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&3\\2&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y+3z=0\\ x+3y+3z=1\\ 2x+5y+6z=0\end{cases}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x+2y+3z=0\\ y=1\\ y=0\end{cases}$$

(1) $E_2 - E_1$
$E_3 - 2E_1$

que es un sistema incompatible porque da dos soluciones distintas para y.

**2.** *El precio unitario de un bien, en función de la cantidad q que se oferta en el mercado, viene dado por la función* $p(q)=\dfrac{1000+3q}{2q}$

*a) Demostrar que al aumentar la cantidad ofertada, disminuye el precio.* *(2 puntos)*
*b) Decir cuál será el precio de ese bien si la cantidad que hay en el mercado es ilimitada, por ejemplo si se puede importar cualquier cantidad por grande que sea.* *(1,5 puntos)*
*c) Escribir, en función de la cantidad ofertada, los ingresos que genera ese bien, si se vende toda la cantidad que hay en el mercado.* *(1 punto)*
*d) Calcular el precio para el que una empresa maximiza sus beneficios, suponiendo que es la única que ofrece ese bien y que los costes vienen dados por la función* $C(q)=4(q+100)-150\ \ln\ q$ . *(5,5 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) Se trata de demostrar que la función p(q) que expresa el precio por unidad según el número q de unidades ofertadas es decreciente:

$$p(q)=\frac{1000+3q}{2q} \Rightarrow p'(q)=\frac{3\cdot 2q-(1000+3q)\cdot 2}{4q^2}=\frac{6q-2000-6q}{4q^2}=-\frac{500}{q^2}<0 \ \forall q \Rightarrow \text{ p(q) es decreciente}$$

b) Si $q\to\infty$, el precio por unidad será: $\lim\limits_{q\to\infty}\frac{1000+3q}{2q}=\frac{3}{2}$

c) Los ingresos que se obtienen es el producto del precio unitario por el número de bienes que se ofrecen y se venden:

$$I(q)=\frac{1000+3q}{2q}\cdot q=\frac{1000+3q}{2}=500+\frac{3}{2}q$$

d) La función beneficio es la diferencia entre la función de ingresos y la función de gastos:

$$B(q)=I(q)-C(q)=500+\frac{3}{2}q-4q-400+150\cdot\ln q=-\frac{5}{2}q+150\cdot\ln q-400$$

Veamos para qué valor de q la función beneficio es máxima: $B'(q)=-\frac{5}{2}+\frac{150}{q}=0 \Rightarrow \frac{150}{q}=\frac{5}{2} \Rightarrow q=60$

Comprobemos que B(q) es máxima: $B''(q)=-\frac{150}{q^2}<0 \Rightarrow$ máximo

Por tanto el precio que maximiza el beneficio es: $p(60)=\frac{1000+180}{120}\approx 9{,}83$

**3.** *En una multinacional, la desviación típica de la edad media de sus trabajadores es de 5 años. Una muestra aleatoria de 200 trabajadores revela una edad media de 40 años. ¿Se puede afirmar con un nivel de significación del 0,05 que la edad media de los trabajadores es de 41 años?. Explicar cada uno de los pasos realizados.* *(10 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

Calculemos un intervalo de confianza para la media de edad:

La desviación típica poblacional es $\sigma=5$ *años*

Un nivel de significación del 0,05 se corresponde con un nivel de confianza del 95% $\Rightarrow z_{\alpha/2}=1{,}96$

El error máximo admisible (radio del intervalo) es: $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.96\cdot\frac{5}{\sqrt{200}}=0{,}693$

Por tanto, se puede afirmar que la media poblacional está en el intervalo $(40-0{,}693\ ,\ 40+0{,}693)=(39{,}3\ ,\ 40{,}69)$ por lo que no resulta aceptable afirmar que la edad media de los trabajadores sea de 41 años.