Septiembre 2003.

OPCIÓN A.

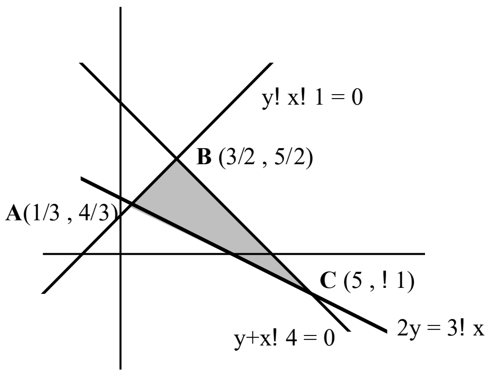
1. *Sea T la región del plano determinada por las siguientes inecuaciones:*

$$y - x - 1 \le 0 \qquad y + x - 4 \le 0 \qquad 2y \ge 3 - x$$

a) Representar gráficamente la región T. *(3 puntos)*
b) Se considera la función f(x,y) = 2y + x. Calcular, si existen, los puntos (x , y) que dan el valor máximo de f(x,y) y los que dan el valor mínimo de f(x,y) en T. *(5 puntos)*
c) ¿Cuál sería la respuesta del apartado anterior si se agrega la desigualdad y ∃ 0?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Representamos las rectas $y - x - 1 = 0$ que pasa por los puntos $(0,1)$ y $(-1,0)$, $y + x - 4 = 0$ que pasa por los puntos $(4,0)$ y $(0,4)$ y $2y = 3 - x$ que pasa por los puntos $(3,0)$ y $(1,1)$. La solución de la inecuación $y - x - 1 \le 0$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas; la solución de $y + x - 4 \le 0$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas; y la solución de la inecuación $2y \ge 3 - x$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas. La región T es la que aparece en gris en la figura adjunta.



b) La función f(x , y) alcanza el valor máximo y el valor mínimo en alguno de los vértices de T. Obtengamos las coordenadas de dichos vértices:

Vértice A: $\begin{cases} y - x - 1 = 0 \\ 2y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

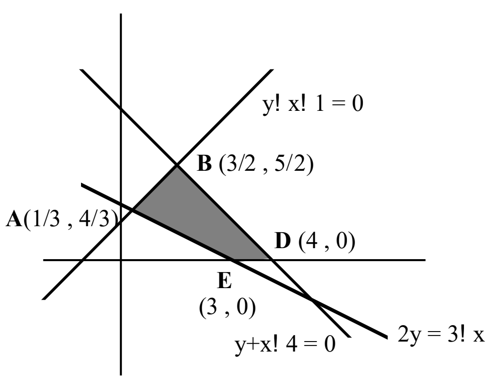
Vértice B: $\begin{cases} y - x - 1 = 0 \\ y + x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ Vértice C: $\begin{cases} y + x - 4 = 0 \\ 2y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow C(5, -1)$

Calculemos es el valor de la función f(x , y) = 2y + x en los vértices de T:

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = 3 \ , \ f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{13}{2} = 6{,}5 \ , \ f(5, -1) = 3$$

luego alcanza el máximo en $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ y el valor mínimo en cualquier punto del segmento AC.

c) Ahora la región en la que hay que buscar el máximo y el mínimo es:



Veamos el valor de la función en los nuevos vértices D y E (en A y B ya lo conocemos):

$$f(4, 0) = 4 \ , \ f(3, 0) = 3$$

Por tanto, en la nueva región, la función alcanza su máximo en $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ y el mínimo en cualquier punto del segmento AE.

2. *Se considera la función* $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x}$

a) Calcular su dominio de definición. Razonar la respuesta. *(1 punto)*
b) Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x). Razonar si existen máximos y mínimos de f(x), y, en caso afirmativo, decir cuáles son. *(4,5 puntos)*
c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de f(x). Razonar si existe punto de inflexión. *(4,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una función racional cuyo dominio es el conjunto de los números reales excepto los que anulen el denominador. En este caso: $Dom\,(f)=\Re-\{4\}$

b) El crecimiento y decrecimiento de la función dependen del signo de la función derivada:

$$f\,'(x)=\frac{2x\cdot(4-x)-x^2\cdot(-1)}{(4-x)^2}=\frac{-x^2+8x}{(4-x)^2}=\frac{x\cdot(-x+8)}{(4-x)^2}$$

$f\,'(x)=0 \Rightarrow x\cdot(-x+8)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=8$ luego f´(x) cambia de signo en x = 0 y x = 8. Se tiene:

f´(x) < 0 | 0 | f´(x) > 0 | 8 | f´(x) < 0

es decir f(x) es decreciente en $(-\infty,0)\,\mathrm{Y}\,(8,\infty)$ y creciente en $(0,8)$.

Los posibles puntos de máximo o de mínimo son los que anulan la primera derivada, es decir: x = 0 y x = 8. Puesto que en x = 0 la función pasa de decreciente a creciente, se trata de un mínimo: (0 , 0). Y como en x = 8 la función pasa de creciente a decreciente, se tratará de un máximo: (8 , !16)

c) La concavidad y convexidad depende del signo de la segunda derivada:

$$f\,''(x)=\frac{(-2x+8)\cdot(4-x)^2-(-x^2+8x)\cdot 2(4-x)(-1)}{(4-x)^4}=\frac{(4-x)\cdot\left[(-2x+8)\cdot(4-x)+2\cdot(-x^2+8x)\right]}{(4-x)^4}=\frac{32}{(4-x)^3}$$

Se tiene: f´´(x) > 0 | 4 | f´´(x) < 0

luego la función es cóncava en $(-\infty,4)$ y convexa en $(4,\infty)$.

La función no tiene puntos de inflexión pues $f\,''(x)\neq 0\ \ \forall x$

3. *De una baraja española de 40 cartas falta el rey de copas. Si, de esta baraja de 39 cartas, se extraen sucesivamente y sin reposición dos cartas, calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) La primera carta es un rey y la segunda un as. *(2 puntos)*
b) Una carta es de copas y la otra de oros. *(3 puntos)*
c) Ninguna carta es un as. *(2 puntos)*
d) Al menos una carta es un caballo. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $p\left(R\ \mathrm{I}\ A\right)=p\left(R\right)\cdot p\left(A/R\right)=\dfrac{3}{39}\cdot\dfrac{4}{38}=\dfrac{12}{1482}=0{,}008$

b) $p\left[(C\ \mathrm{I}\ O)\,\mathrm{Y}\,(O\ \mathrm{I}\ C)\right]=\dfrac{9}{39}\cdot\dfrac{10}{38}+\dfrac{10}{39}\cdot\dfrac{9}{38}=\dfrac{180}{1482}=0{,}12$

c) $p\left(\overline{A}\right)=\dfrac{35}{39}\cdot\dfrac{34}{38}=\dfrac{1190}{1482}=0{,}803$

d) $p=1-p\left(\overline{C}\right)=1-0{,}803=0{,}197$

Septiembre 2003.

OPCIÓN B.

1. *Una empresa de juguetes fabrica bicicletas, triciclos y coches. Se sabe que va a necesitar 945 ruedas, que desea fabricar 280 juguetes en total y que se fabricarán 10 bicicletas menos que triciclos.*

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de juguetes de cada tipo que va a fabricar. *(3 puntos)*
b) Resolver el sistema anterior por el método de Gauss. *(5 puntos)*
c) ¿Cuál es la relación entre el número de bicicletas y el de coches que se van a fabricar si no se considera la última condición? *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sea x el nº de bicicletas, y el de triciclos y z el de coches. Se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=280 \\ 2x+3y+4z=945 \\ x+10=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=280 \\ 2x+3y+4z=945 \\ x-y=-10 \end{cases}$$

b) El método de Gauss consiste en aplicar las transformaciones elementales al sistema dado hasta conseguir un sistema escalonado equivalente:

$$\begin{cases} x+y+z=280 \\ 2x+3y+4z=945 \\ x-y=-10 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=280 \\ y+2z=385 \\ -2y-z=-290 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=280 \\ y+2z=385 \\ 3z=480 \end{cases} \Rightarrow z=160\ ,\ y=65\ ,\ x=55$$

Transformaciones elementales: (1) E_2-2E_1 E_3-E_1 (2) E_3+2E_2

luego fabricará 55 bicicletas, 65 triciclos y 160 coches.

c) El sistema tendrá ahora dos ecuaciones y tres incógnitas:

$$\begin{cases} x+y+z=280 \\ 2x+3y+4z=945 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{x+y+z=280} \\ \mathrm{y+2z=385} \end{cases} \Leftrightarrow y=385-2z \Rightarrow x+385-2z+z=280 \Rightarrow z-x=105$$ es decir,

se fabricarán 105 coches más que bicicletas.

2. *Sea* $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si } x<2 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$

a) Calcular los valores del parámetro a para los que f(x) es continua en x = 2. *(2,5 puntos)*
b) ¿Para qué valor del parámetro a la función f(x) tiene un máximo o mínimo en x = !1?. Determinar si es máximo o mínimo. *(3,5 puntos)*
c) Para a = 4, determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f(x). *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Para que la función sea continua en x = 2 deben cumplirse las siguientes condiciones:

i) $\exists\, f(2)=\dfrac{2}{2}=1$

ii) $\exists \lim_{x\to 2} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\left(x^2 + ax\right) = \lim_{x\to 2} \frac{2}{x} \Leftrightarrow 4 + 2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

iii) $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$

luego para que la función sea continua en x = 2, debe ser $a = -\frac{3}{2}$

b) Para x = !1, la función es $f(x) = x^2 + ax$ y para que la función tenga un máximo o un mínimo en x = !1 debe ser: $f'(-1) = 0$.

X $f'(x) = 2x + a \;\Rightarrow\; f'(-1) = -2 + a = 0 \;\Rightarrow\; a = 2$

X Como $f''(x) = 2 > 0 \;\; \forall x \;\Rightarrow$ En x = !1 la función tiene un mínimo.

c) Ahora la función es: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ y su función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x < 2 \\ -\dfrac{2}{x^2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Los signos de f´(x) son: f´(x) < 0 | -2 | f´(x) > 0 | 2 | f´(x) < 0 luego la función es:

decreciente en $(-\infty, -2)$ Y $(2, \infty)$ y creciente en $(-2, 2)$.

3. *Se sabe que la desviación típica del peso de las sandías de una plantación es de 750 gramos. Calcular el número mínimo de sandías que se han de elegir para, con un nivel de confianza del 95%, estimar el peso medio de cada una con un error menor que 300 gr. Explicar los pasos seguidos para obtener el resultado.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La desviación típica de la población es: $\sigma = 750\ gr$.

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible debe ser E = 300 gr

Queremos calcular el número mínimo de una muestra de sandías con todas estas condiciones. Se tiene: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot \sigma^2}{E^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 750^2}{300^2} = 24{,}01 \;\Rightarrow\;$ el número mínimo de sandías debe ser de 25.