Junio 2002.

OPCIÓN A.

1. *Se considera la función $f(x , y) = x + 3y$, se pide:*

a) Razonar si $f(x , y)$ alcanza un valor máximo y uno mínimo en el conjunto:

$$S = \{(x, y) \;/\; 2x + y \le 4 \;,\; x + 3y \le 7 \;,\; x \ge 0 \;,\; y \ge 0\}$$

En caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos en los que se alcanzan. *(6 puntos)*

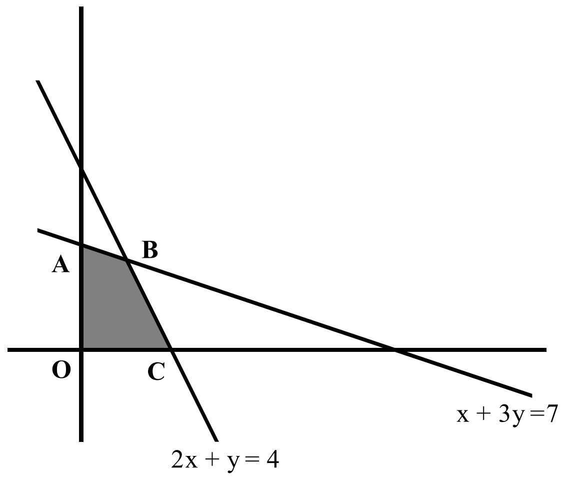
b) Razonar si $f(x , y)$ alcanza un valor máximo y uno mínimo en el conjunto:

$$T = \{(x, y) \;/\; 2x + y \ge 4 \;,\; x + 3y \ge 7 \;,\; x \ge 0 \;,\; y \ge 0\}$$

En caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos en los que se alcanzan. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Representemos el conjunto S:



Calculemos las coordenadas de los vértices:

Vértice O: O (0 , 0)

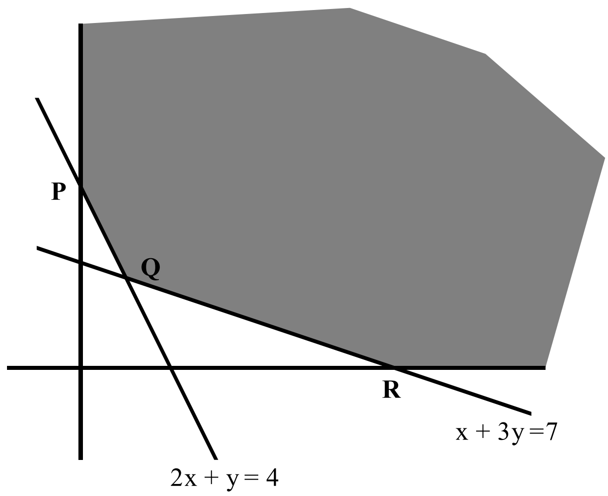
Vértice A: $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(0\,,\frac{7}{3}\right)$

Vértice B: $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(1\,,2)$

Vértice C: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(2\,,0)$

Los puntos donde la función f(x , y) alcanza un máximo o un mínimo están entre los vértices del conjunto S. Calculemos el valor de la función en dichos vértices: $f(0\,,0) = 0$, $f\left(0\,,\frac{7}{3}\right) = 7$, $f(1\,,2) = 7$, $f(2\,,0) = 2$ $\Rightarrow$ el valor mínimo lo alcanza en el punto (0 , 0) y el valor mínimo en cualquier punto del lado AB.

b) Representemos el conjunto T:



Ahora se trata de una región abierta. Los vértices son:

P (0 , 4) , Q (1 , 2) y R (0 , 7)

El valor que toma la función en cada uno de ellos es:

$$f(0\,,4) = 12 \;,\; f(1\,,2) = 7 \;,\; f(7\,,0) = 7$$

luego alcanza un mínimo en cualquier punto del segmento QR y el máximo no lo alcanza en ningún punto pues se trata de una región abierta.

2. *Se considera la función* $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). *(3 puntos)*
b) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de f(x). ¿Existen puntos de inflexión?. Razonar la respuesta. *(5 puntos)*
c) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en x = 0. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}>0\ \ \forall x\ \Rightarrow \text{ la función es creciente.}$$

b) Los intervalos de concavidad y convexidad dependen del signo de la segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{-2\cdot 2\,(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-4}{(x+1)^3}\ \Rightarrow \begin{cases}\bullet\ \text{Para } x<-1:\ f''(x)>0\ \Rightarrow \text{ la función es cóncava en } (-\infty,-1)\\ \bullet\ \text{Para } x>-1:\ f''(x)<0\ \Rightarrow \text{ la función es convexa en } (-1,\infty)\end{cases}$$

No existen puntos de inflexión porque $f''(x)\neq 0 \quad \forall x$

c) La recta tangente tiene por pendiente $m=f'(0)=2$ y pasa por el punto $(0,f(0))=(0,-1)$. Su ecuación es por tanto: $y-y_0=m\cdot(x-x_0)\ \Leftrightarrow\ y+1=2\cdot(x-0)\ \Leftrightarrow\ y=2x-1$

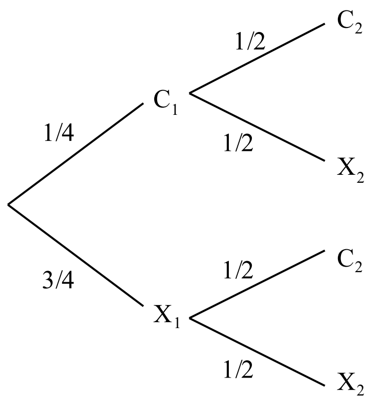
3. *Se tienen dos monedas, una sin trucar y otra trucada. Sabiendo que con la moneda trucada la probabilidad de obtener cruz es triple que la probabilidad de obtener cara, calcular la probabilidad de que al lanzar las dos monedas:*

a) Se obtengan dos caras. *(2,5 puntos)*
b) No se obtenga ninguna cara. *(2,5 puntos)*
c) Se obtenga una cara y una cruz. *(2,5 puntos)*
d) Se obtengan dos caras o dos cruces. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación (C_1 = "cara con la moneda trucada", X_1 = "cruz con la moneda trucada", C_2 = "cara con la moneda normal", X_2 = "cruz con la moneda normal"):

Puesto que los resultados con ambas monedas son independientes:



a) $p(C_1\cap C_2)=p(C_1)\cdot p(C_2)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}=0{,}125$

b) $p(X_1\cap X_2)=p(X_1)\cdot p(X_2)=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}=0{,}375$

c) $p[(C_1\cap X_2)\cup(X_1\cap C_2)]=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{8}=\dfrac{4}{8}=0{,}5$

d) $p[(C_1\cap C_2)\cup(X_1\cap X_2)]=p(C_1\cap C_2)+p(X_1\cap X_2)=$

$=0{,}125+0{,}375=0{,}5$

Junio 2002.

OPCIÓN B.

1. *En una empresa trabajan 160 personas y todas ellas deben hacerse un reconocimiento médico en el plazo de tres días. El primer día se lo hace la tercera parte de los que se lo hacen durante los otros dos días. El segundo día y el tercero se lo hacen el mismo número de personas. Se pide:*

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales que permita calcular el número de trabajadores que se hacen el reconocimiento cada día. *(5 puntos)*
b) Resolver el sistema de ecuaciones lineales propuesto en el apartado anterior por el método de Gauss. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sea "x" el número de personas que se hacen el reconocimiento el primer día, "y" los que se lo hacen el segundo día y "z" el tercer día. Se tiene:

a) $$\begin{cases} x+y+z=160 \\ x=\dfrac{y+z}{3} \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=160 \\ 3x-y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

b) Utilicemos el método de Gauss para resolver el sistema planteado:

$$\begin{cases} x+y+z=160 \\ 3x-y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=160 \\ y-z=0 \\ 3x-y-z=0 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=160 \\ y-z=0 \\ -4y-4z=-480 \end{cases} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=160 \\ y-z=0 \\ -8z=-480 \end{cases} \Rightarrow z=60\ ,\ y=60\ ,\ x=40$$

luego el primer día se hacen el reconocimiento 40 personas, el segundo día 60 y el tercero 60.

Transformaciones elementales: (1) cambio de orden de las ecuaciones (2) E_3-3E_1 (3) E_3+4E_2

2. *Dada la función* $f(x)=ax^3+bx+11$*, donde a y b son parámetros reales, se pide:*

a) Determinar el valor de los parámetros a y b para que f(x) tenga un extremo relativo en el punto (2 , 5). ¿Es máximo o mínimo? *(5 puntos)*
b) Considerando b = 0, determinar el valor del parámetro a para que f(x) tenga una primitiva cuya gráfica pase por el origen y por el punto (1 , 1). *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si f(x) tiene un extremo relativo en el punto (2 , 5) deben ser: f(2) = 5 y f´(2) = 0.

$$f'(x)=3ax^2+b \Rightarrow f'(2)=12a+b=0 \qquad f(2)=8a+2b+11=5$$

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 12a+b=0 \\ 8a+2b=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24a+2b=0 \\ -8a-2b=6 \end{cases} \Rightarrow\ 16a=6 \ \Rightarrow\ a=\frac{3}{8}\ ,\ b=-\frac{9}{2}$$

Para dichos valores: $f'(x)=\frac{9}{8}x^2-\frac{9}{2} \ \Rightarrow\ f''(x)=\frac{9}{4}x \ \Rightarrow\ f''(2)>0 \ \Rightarrow$ se trata de un mínimo.

b) La función es: $f(x)=ax^3+11$. Calculemos una primitiva de la función: $F(x)=\int\left(ax^3+11\right)dx=\frac{ax^4}{4}+11x+k$.

Debe ser: F(0) = 0 y F(1) = 1 luego: $\begin{cases} k=0 \\ \frac{a}{4}+11=1 \end{cases} \Rightarrow\ a=-40$

3. *La desviación típica del número de horas diarias que duermen los alumnos de cierta Universidad es 3 horas. Se considera una muestra aleatoria de 40 estudiantes que revela una media de sueño de 7 horas. Hallar un intervalo de confianza del 95% para la media de horas de sueño de los estudiantes de esta Universidad. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La desviación típica poblacional es $\sigma=3$ horas

Para el nivel de confianza del 95%, el valor crítico es: $z_{\alpha/2}=1{,}96$

El radio del intervalo (error máximo admisible) es: $E=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}96\cdot\frac{3}{\sqrt{40}}=0{,}9297\cong 0{,}93$

Por tanto: $\left(7-0{,}93\ ,\ 7+0{,}93\right)=\left(6{,}07\ ,\ 7{,}93\right)$ es decir, entre 6,07 y 7,93 horas.