Septiembre 2002.

OPCIÓN A.

1. *Una empresa se dedica a la producción de dos tipos de tejidos A y B utilizando como materias primas algodón, poliéster y seda. Se dispone de 60 unidades de algodón, de 35 de seda y de 80 de poliéster y se sabe que las unidades de cada materia prima necesarias para la producción de 1 rollo de cada tipo de tejido vienen dadas en la siguiente tabla*

	algodón	***poliéster***	***seda***
A	*1*	*2*	*0*
B	*3*	*2*	*1*

a) Calcular el beneficio total máximo, sabiendo que el beneficio obtenido de un rollo del tejido A es de 50 euros y del B es de 70. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. *(7 puntos)*
b) ¿Se obtendría excedente de alguna materia prima?. En caso afirmativo, decir cuántas unidades. *(2 puntos)*
c) ¿Cambiaría la solución del apartado a) si al menos hubiera que producir 15 rollos del tejido A?. Razona la respuesta. *(1 punto)*

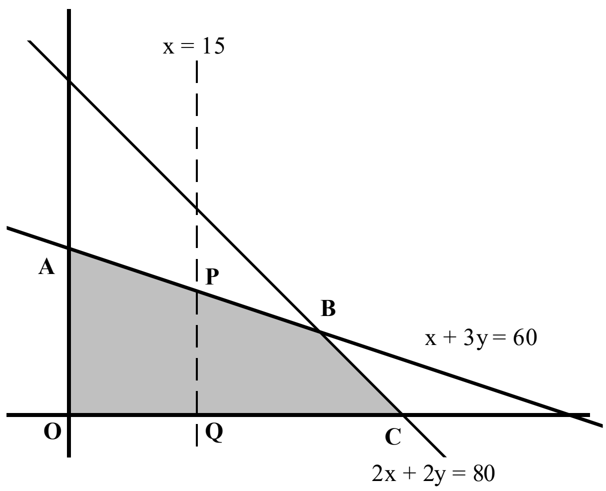
SOLUCIÓN.

Tejido	**nº de rollos**	**algodón**	**poliéster**	**seda**	**Beneficio**
A	x	x	2x	0x	50x
B	y	3y	2y	y	70y
	$x \geq 0$; $y \geq 0$	≤ 60	≤ 80	≤ 35	F(x, y)

Función objetivo: F(x , y) = 50x+70y
Restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 60 \\ 2x + 2y \leq 80 \\ y \leq 35 \end{cases}$$

a) Construyamos la región factible (solución del conjunto de restricciones):



Calculemos las coordenadas de los vértices de la región factible OABC:

Vértice O: O (0 , 0)

Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ x + 3y = 60 \end{cases} \Rightarrow A(0, 20)$

Vértice B: $\begin{cases} x + 3y = 60 \\ 2x + 2y = 80 \end{cases} \Rightarrow B(30, 10)$

Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ 2x + 2y = 80 \end{cases} \Rightarrow C(40, 0)$

El valor que toma la función objetivo en los vértices de la región factible es:

F(0 , 0) = 0 , F(0 , 20) = 1400 ,
F(30 , 10) = 2200 , F(40 , 0) = 2000

Luego la función objetivo se maximiza en el punto (30 , 10), es decir deben fabricarse 30 rollos del tejido A y 10 del B y el beneficio obtenido será de 2200 euros.

b) Se utilizarán $30 + 3 \cdot 10 = 60$ unidades de algodón, $2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 = 80$ de poliéster y $0 \cdot 30 + 10 = 10$ de seda, luego sobrarán 25 unidades de seda.

c) Si se añade la condición $x \geq 15$ la solución sigue siendo la misma. La región factible es ahora PBCQ y la función objetivo sigue maximizándose en el vértice B: $P(15, 15) \Rightarrow f(15, 15) = 1800$, $Q(15, 0) \Rightarrow f(15, 0) = 750$

2. *La demanda de un bien en función de su precio viene dada por* $D(p) = \dfrac{30p+10}{p}$.

a) Demostrar que al aumentar el precio disminuye la demanda. *(2 puntos)*
b) Suponiendo que el precio aumenta indefinidamente, decir qué ocurrirá con la demanda. *(3 puntos)*
c) Escribir los ingresos de una empresa en función del precio suponiendo que dicha empresa es la única que produce este bien. *(1 punto)*
d) Calcular el precio para que la empresa del apartado anterior maximice sus beneficios sabiendo que los costes vienen dados por C(p) = $p^2/4$. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se trata de comprobar que la función demanda es decreciente. Para ello veamos el signo de su función derivada:

$D'(p) = \dfrac{30p - 30p - 10}{p^2} = -\dfrac{10}{p^2} < 0 \quad \forall p \;\Rightarrow$ la función es decreciente y, por tanto, cuando p aumenta D disminuye.

b) $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{30p+10}{p} = 30 \;\Rightarrow$ la demanda tenderá a 30

c) $I(p) = D(p)\cdot p = \dfrac{30p+10}{p}\cdot p = 30p+10$

d) Los beneficios son la diferencia entre los ingresos y los costes:

$$B(p) = I(p) - C(p) = 30p + 10 - \frac{p^2}{4} = -\frac{1}{4}p^2 + 30p + 10$$

Veamos para qué valor de p la función B(x) alcanza su máximo:

$B'(p) = -\dfrac{1}{2}p + 30 = 0 \;\Rightarrow\; p = 60$ (valor crítico). Comprobemos que este valor de p maximiza los beneficios:

$B''(p) = -\dfrac{1}{2} < 0 \;\Rightarrow$ máximo , luego, en efecto a un precio de 60 los beneficios serán máximos

3. *Se lanzan un dado azul y tres rojos. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) En todos los dados rojos se obtiene la misma puntuación que en el azul. *(3 puntos)*
b) Al menos en uno de los rojos se obtiene la misma puntuación que en el azul. *(3,5 puntos)*
c) Todas las puntuaciones obtenidas son pares o todas son múltiplos de 3. *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) El suceso equivale a que en los cuatro dados se obtenga la misma puntuación: $p = 6\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = \dfrac{1}{6^3} = \dfrac{1}{216} = 0{,}0046$

b) La probabilidad de que en los tres dados rojos salga una puntuación distinta que la puntuación obtenida en el azul es de: $\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{5}{6}\right)^3\cdot 6 = \left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{125}{216} = 0{,}5787 \;\Rightarrow$ la probabilidad de que en algún dado rojo salga la misma puntuación que la obtenida en el azul es: $1 - \dfrac{125}{216} = \dfrac{91}{216} = 0{,}4213$.

c) $p(2 \cup 3) = p(2) + p(3) - p(2 \cap 3) = \left(\dfrac{3}{6}\right)^4 + \left(\dfrac{2}{6}\right)^4 - \left(\dfrac{1}{6}\right)^4 = 0{,}074$

Septiembre 2002.

OPCIÓN B.

1. *a) Se considera el sistema* $\begin{cases} (a-3)x+by+cz=-5 \\ bx-ay+10z=17 \\ ax+z=c+6 \end{cases}$. *Calcular, mediante el método de Gauss, los posibles valores que pueden tomar los parámetros a, b y c para que el sistema tenga por solución x = 1, y = -3, z = -1.* *(7 puntos)*

b) Con las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *comprobar la propiedad asociativa del producto de matrices.* *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si las soluciones han de ser las que se indican, las podemos sustituir en el sistema dado y después resolver el sistema que queda (donde las incógnitas serán los parámetros):

$$\begin{cases} a-3-3b-c=-5 \\ b+3a-10=17 \\ a-1=c+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3b-c=-2 \\ 3a+b=27 \\ a-c=7 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a-3b-c=-2 \\ 10b+3c=33 \\ 3b=9 \end{cases} \Leftrightarrow b=3\ ,\ c=1\ ,\ a=8$$

Transformaciones elementales: (1) E_2-3E_1 , E_3-E_1

b) Hay que comprobar que $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$:

$$(A\cdot B)\cdot C=\left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 27 & 32 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 118 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot(B\cdot C)=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 118 & -5 \end{pmatrix}$$

luego, en efecto, se cumple la propiedad asociativa del producto para estas matrices.

2. *Se considera* $f(x)=ax^4-\dfrac{9x^2}{2}+b$

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que f(x) tenga un mínimo en el punto (3 , -8). *(6 puntos)*
b) Para a = 4 y b = 0, calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). *(4 puntos)*

SOLUCIÓN

a) Si f(x) tiene un mínimo en el punto $(3,-8)$, debe ocurrir: $f(3)=-8$ y $f'(3)=0$. Tenemos: $f'(x)=4ax^3-9x$
Exigiendo que se cumplan las dos condiciones citadas:

$$\begin{cases} 81a-\dfrac{81}{2}+b=-8 \\ 108a-27=0 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{27}{108}=\frac{1}{4}\ ,\ b=-8-\frac{81}{4}+\frac{81}{2}=\frac{49}{4} \quad \text{es decir: } a=\frac{1}{4} \text{ y } b=\frac{49}{4}$$

b) La función es $f(x)=4x^4-\dfrac{9}{2}x^2 \Rightarrow f'(x)=16x^3-9x$. El estudio del crecimiento y decrecimiento es el estudio del signo de f´(x): $f'(x)=0 \Leftrightarrow 16x^3-9x=x(16x^2-9)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=\pm\dfrac{3}{4}$.

Se tiene:

$f'(x) < 0$		$f'(x) > 0$		$f'(x) < 0$		$f'(x) > 0$
	$-3/4$		0		$3/4$	

luego la función es:

decreciente en $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \text{Y} \left(0, \frac{3}{4}\right)$ y creciente en $\left(-\frac{3}{4}, 0\right) \text{Y} \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$

3. *En una población, por cada persona que fuma 4 no lo hacen. Calcular el tamaño mínimo que debe tener una muestra de dicha población para que, con un nivel de confianza del 95%, la proporción muestral y la poblacional no difieran en más de 0,04. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La proporción de fumadores en la población es $pr = \frac{1}{5} = 0{,}2$ y la proporción de no fumadores será de $1 - pr = 0{,}8$.

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico que debemos utilizar es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El error máximo admisible entre los datos de la muestra y de la población es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot (1 - pr)}{n}} \quad \Rightarrow \quad \frac{E^2}{z_{\alpha/2}^2} = \frac{pr \cdot (1 - pr)}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot pr \cdot (1 - pr)}{E^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}04^2} = 2501$$

luego la muestra debe estar formada por un mínimo de 2501 personas.