Septiembre 2000.

OPCIÓN A.

1. *Una empresa produce dos tipos de bolsos A y B. La producción de un bolso de tipo A requiere 3 unidades de materia prima y 5 horas de trabajo. Por otra parte, la producción de un bolso de tipo B requiere 2 unidades de materia prima y 4 horas de trabajo. La empresa en cuestión dispone cada día de 180 unidades de materia prima y 320 horas de trabajo. Sabiendo que cada bolso de tipo A produce un beneficio de 4 unidades monetarias, cada bolso de tipo B 3 unidades monetarias y que se vende todo lo que se produce, se pide:*

a) ¿Cuántos bolsos de cada tipo se han de producir diariamente para que el beneficio sea máximo?. Explicar los pasos seguidos para obtener la solución. (7 puntos)
b) Suponer que cambian los beneficios producidos por cada tipo de bolso, siendo el que produce uno de tipo A de 3 unidades monetarias y uno de tipo B de 2, ¿varía la solución del apartado a)?. En caso de que varíe, calcular la nueva solución del problema. (3 puntos)

SOLUCIÓN.

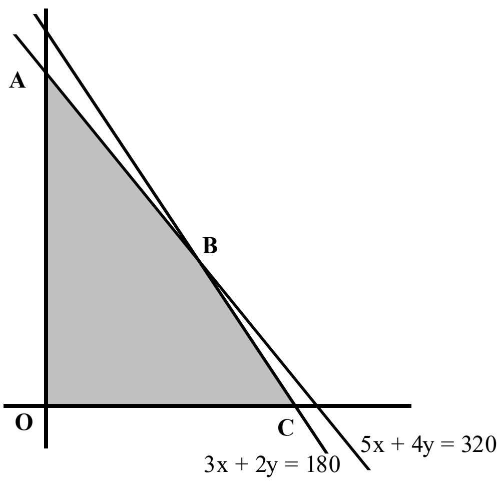
Se trata de un problema de Programación Lineal. Organicemos los datos y escribamos la función objetivo y las restricciones a que está sometida:

Tipo de bolso	Número	Mat. Prima	Horas	Beneficio
A	x	3x	5x	4x
B	y	2y	4y	3y
	$x \geq 0$ $y \geq 0$	≤ 180	≤ 320	$f(x, y)$

Función objetivo (maximizar): $f(x, y) = 4x + 3y$

Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 180 \\ 5x + 4y \leq 320 \end{cases}$

Construyamos la región factible (solución del sistema de restricciones) y calculemos las coordenadas de sus vértices:



Vértice O: $O(0, 0)$

Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 5x + 4y = 320 \end{cases} \Rightarrow A(0, 80)$

Vértice B: $\begin{cases} 3x + 2y = 180 \\ 5x + 4y = 320 \end{cases} \Rightarrow B(40, 30)$

Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ 3x + 2y = 180 \end{cases} \Rightarrow C(60, 0)$

La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Sustituyamos las coordenadas de los vértices en la función objetivo para ver en cual alcanza el mayor valor:

$f(0, 0) = 0$, $f(0, 80) = 240$, $f(40, 30) = 250$, $f(60, 0) = 240$
luego se maximiza para 40 bolsos del tipo A y 30 bolsos del tipo B.

b) Ahora varía la función objetivo $f(x, y) = 3x + 2y$ pero no las restricciones. Veamos el valor de la nueva función en los vértices de la región factible: $f(0, 0) = 0$, $f(0, 80) = 160$, $f(40, 30) = 180$, $f(60, 0) = 180$. Como alcanza el mayor valor tanto en el vértice B como en el vértice C, la solución es cualquier punto del segmento BC con coordenadas enteras.

2. *Considerar la función* $f(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$, *siendo p y q números reales. Se pide:*

a) ¿Qué valores deben tomar p y q para que f(x) tenga un mínimo en el punto (1, 1)? Razonar la respuesta. *(7 puntos)*

b) Para p = 3 y q = 2, razonar si f(x) tiene puntos de inflexión y, en caso afirmativo, calcularlos. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Si tiene un mínimo en el punto $(1, 1)$ debe ocurrir: $f(1) = 1$ y $f'(1) = 0$:

$$f(1) = 1 + p + q + 1 = 1 \Rightarrow p + q = -1 \quad (*)$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2px + q \Rightarrow f'(1) = 3 + 2p + q = 0 \Rightarrow 2p + q = -3 \quad (*)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (*): $\begin{cases} p + q = -1 \\ 2p + q = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -p - q = 1 \\ 2p + q = -3 \end{cases} \Rightarrow p = -2 \ , \ q = 1$

b) La función es $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x + 2 \Rightarrow f''(x) = 6x + 6$

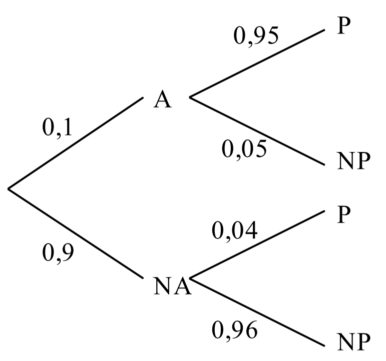
Los puntos de inflexión satisfacen $f''(x) = 0$ y $f'''(x) \neq 0$: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ y como $f'''(x) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ la función tiene un punto de inflexión en x = !1: $(-1, 1)$.

3. *En una empresa de transportes la probabilidad de que se accidente un camión es 0,1. Si se produce el accidente, la probabilidad de perder la carga es 0,95. Por otra parte, la probabilidad de perder la carga sin que haya accidente es 0,04. Calcular razonadamente:*

a) La probabilidad de que se pierda la carga de un camión. *(5 puntos)*
b) Sabiendo que se ha perdido la carga de un camión, la probabilidad de que no haya tenido un accidente. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación (A = "accidente" , NA = "no accidente" , P = "perder la carga" , NP = "no perder la carga"):



a) Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(P) = p(A) \cdot p(P / A) + p(NA) \cdot p(P / NA) =$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}04 = 0{,}131$$

b) Aplicación del teorema de Bayes:

$$p(NA / P) = \frac{p(NA) \cdot p(P / NA)}{p(A) \cdot p(P / A) + p(NA) \cdot p(P / NA)} =$$
$$= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}04}{0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}04} = 0{,}2748$$

Septiembre 2000.

OPCIÓN B.

1. *Considerar las matrices* $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}$. *Se pide:*

a) Determinar una matriz X que verifique: $A^2\cdot X=\frac{1}{2}B\cdot C$ *(5 puntos)*

b) Considerar el sistema de ecuaciones lineales $(C\cdot B)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. *Discutir si existe solución y, en caso afirmativo, resolverlo por el método de Gauss.* *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Obtengamos las matrices A^2 y $\frac{1}{2}B\cdot C$:

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{2}B\cdot C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}12 & 8\\ 10 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 5 & 1\end{pmatrix}$$

La matriz X debe ser una matriz 2H2: $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Se cumple:

$$\begin{pmatrix}4 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 5 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}4a & 4b\\ 3a+c & 3b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 5 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}4a=6\\ 4b=4\\ 3a+c=5\\ 3b+d=1\end{cases} \Rightarrow a=\frac{3}{2}\ ,\ b=1\ ,\ c=\frac{1}{2}\ ,\ d=-2$$

Por tanto: $X=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & -2\end{pmatrix}$

b) Calculemos la matriz de los coeficientes $C\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 8 & 1\\ 0 & 4 & 3\\ 4 & 12 & 14\end{pmatrix}$

Puesto que se trata de un sistema homogéneo, el rango de la matriz de los coeficientes es igual que el de la matriz ampliada. Lo que hay que ver es si este rango es igual al número de incógnitas (es decir, 3) o menor:

$$rg\begin{pmatrix}-4 & 8 & 1\\ 0 & 4 & 3\\ 4 & 12 & 14\end{pmatrix}\overset{(1)}{=}rg\begin{pmatrix}-4 & 8 & 1\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 20 & 15\end{pmatrix}\overset{(2)}{=}rg\begin{pmatrix}-4 & 8 & 1\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2$$ $\Rightarrow$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2 $\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

Transformaciones elementales: (1) F_3-F_1 (2) F_3-5F_2

El sistema dado es equivalente al: $\begin{cases}-4x+8y+z=0\\ 4y+3z=0\end{cases} \Rightarrow z=\lambda\ ,\ y=-\frac{3\lambda}{4}\ ,\ x=-\frac{5\lambda}{4}$

2. *a) De entre todos los pares de números que suman 30, calcular aquel par cuyo producto sea máximo. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(5 puntos)*
b) Calcular el área del recinto plano limitado por las gráficas de $y = x^2$, $y = x$. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sean los números: x , $30 - x$.

La función $f(x) = x \cdot (30 - x) = 30x - x^2$ debe ser máxima. El valor de x donde la función alcanza su máximo debe verificar: $f'(x) = 0$ y $f''(x) < 0$:

$f'(x) = 30 - 2x = 0 \Rightarrow x = 15$ y $f''(x) = -2 < 0$. Por tanto, la función es máxima para x = 15, es decir, los dos números cuya suma es 30 y cuyo producto es máximo son 15 y 15.

b) La función diferencia de las dos funciones dadas es: $f(x) = x^2 - x$. Calculemos el área limitada por esta función y el eje de abscisas.

X Puntos de corte con OX: $x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 1$ (límites de integración)

X $\int_0^1 (x^2 - x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow S = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}u^2$

3. *En una región se seleccionó aleatoriamente una muestra de 150 personas. A todas ellas se les preguntó si eran fumadoras y 90 contestaron que no. Determinar un intervalo del porcentaje de fumadores de dicha región con un nivel de confianza del 95%. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

La proporción muestral de fumadores es $pr = \frac{60}{150} = 0{,}4$ y la de no fumadores $1 - pr = 0{,}6$.
Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

El error máximo admisible es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot (1 - pr)}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{150}} = 0{,}0784$

Por tanto, el intervalo del porcentaje de fumadores en la región es:

$(pr - E\,,\, pr + E) = (0{,}4 - 0{,}0784\ ,\ 0{,}4 + 0{,}0784) = (0{,}3216\ ,\ 0{,}4784)$ es decir, entre un 32,16% y un 47,84%.