Junio 1999.

OPCIÓN A.

1. *Una empresa se dedica a la producción de frascos de perfume y de agua de colonia a partir de tres factores productivos F_1, F_2 y F_3. Las unidades de dichos factores utilizadas en la producción de cada tipo de frasco se detallan en la siguiente tabla:*

	Perfume	***Agua de colonia***
F_1	*1*	*2*
F_2	*2*	*0*
F_3	*0*	*4*

Sabiendo que el precio de venta de un frasco de perfume es de 5.000 pesetas, de uno de agua de colonia es de 2.000 pesetas y que la empresa dispone de 240 unidades de F_1, 360 de F_2 y 440 de F_3:

a) Calcular el número de frascos de cada tipo que debe fabricar la empresa para maximizar sus beneficios. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(8 puntos)*
b) ¿Se consumen todas las existencias de F_1, F_2 y F_3 en la producción de los frascos que maximiza los beneficios?. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

Es un problema de Programación Lineal. Elaboremos una tabla con todos los datos y condiciones y escribamos la función objetivo y las restricciones a que debe estar sometida:

Producto	**nº de frascos**	**F_1**	**F_2**	**F_3**	**Beneficio**
Perfume	x	x	2x	0x	5000x
Colonia	y	2y	0y	4y	2000y
	$x \geq 0$; $y \geq 0$	≤ 240	≤ 360	≤ 440	$f(x, y)$

X La función objetivo (máxima) es:

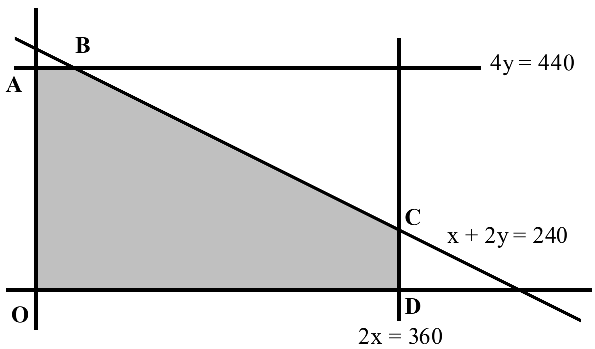
$$f(x, y) = 5000x + 2000y$$

X Las restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 240 \\ 2x \leq 360 \\ 4y \leq 440 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema de inecuaciones para obtener la región factible (en gris):

La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos las coordenadas de los vértices y el valor que tiene la función objetivo en los mismos:



Vértice O: $O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0$

Vértice A: $A(0, 110) \Rightarrow f(0, 110) = 220000$

Vértice B:

$$\begin{cases} y = 110 \\ x + 2y = 240 \end{cases} \Rightarrow B(20, 110) \Rightarrow f(20, 110) = 320000$$

Vértice C:

$$\begin{cases} x + 2y = 240 \\ x = 180 \end{cases} \Rightarrow C(180, 30) \Rightarrow f(180, 30) = 960000$$

Vértice D: $D(180, 0) \Rightarrow f(180, 0) = 900000$

La función objetivo tiene el máximo valor en el vértice C y, por tanto, deben fabricarse 180 frascos de perfume y 30 de agua de colonia.

b) Se consumen: 180 + 60 = 240 de F_1, 360 de F_2 y 120 de F_3. Sobran entonces 320 unidades de F_3.

2. *Sea la función* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+b & \text{si } x\le -1 \\ 3x^2+4 & \text{si } -1<x<1 \\ -x^3+8 & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$ *donde b es un parámetro real. Se pide:*

a) Calcular el valor del parámetro b para que f(x) sea continua en x = −1 y en x = 1. *(4 puntos)*
b) Calcular el área del recinto plano limitado por y = f(x), y = 0, x = 0, x = 2. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Para que la función sea continua en x = −1 y en x = 1, debe ocurrir:

i) $\exists f(-1)=1+b$ y $\exists f(1)=7$

ii) $\exists \lim\limits_{x\to -1} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x^2}+b\right)=\lim\limits_{x\to -1}(3x^2+4) \Rightarrow 1+b=7 \Rightarrow b=6$

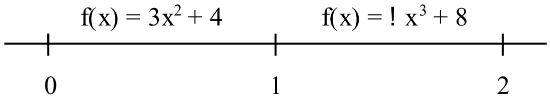
$\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2+4\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-x^3+8\right) \Rightarrow 7=7 \Rightarrow$ f(x) es continua en x = 1

iii) $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ lo que se verifica cuando b = 6

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ que como se puede comprobar, se verifica.

Por tanto, la función es continua para b = 6.

b) Entre x = 0 y x = 2, la función está definida así:



Se tiene: $S_1=\int_0^1\left(3x^2+4\right)dx=\left[x^3+4x\right]_0^1=5$

$$S_2=\int_1^2\left(-x^3+8\right)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+8x\right]_1^2=(-4+16)-\left(-\frac{1}{4}+8\right)=\frac{17}{4}$$

y por tanto: $S=S_1+S_2=\dfrac{37}{4}u^2$

3. *Un dado ha sido trucado de manera que la probabilidad de sacar un número par es el doble que la de sacar un número impar. Se lanza el dado y se pide:*

a) la probabilidad de obtener un número par. *(3 puntos)*
b) si a la vez se lanza un dado no trucado, la probabilidad de obtener un número par y un número impar. *(3 puntos)*
c) si a la vez se lanza un dado no trucado, la probabilidad de obtener al menos un número impar. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $p(P)=\dfrac{2}{3}$

b) $p\left[(P_1\cap I_2)\cup(I_1\cap P_2)\right]=p(P_1\cap I_2)+p(I_1\cap P_2)=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

c) El suceso "al menos un número impar" es el suceso contrario al suceso "ningún número impar" o "los dos pares"

$$p(P_1\cap P_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3} \Rightarrow p(\text{"al menos un número impar"})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Junio 1999.

OPCIÓN B.

1. *Considerar la ecuación matricial:* $X\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & m^2+m \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, *con m un parámetro real. Se pide:*

a) ¿Para qué valores del parámetro m existe una única matriz X que verifica la ecuación anterior? *(4 puntos)*
b) Si es posible, resolver la ecuación matricial para m = 0. *(3 puntos)*
c) Si es posible, resolver la ecuación matricial para m = 1. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Despejando la matriz X: $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & m^2+m \end{pmatrix}^{-1}$. Por tanto, para que X sea calculable, debe existir la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & m^2+m \end{pmatrix}$ y esto hace que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & m^2+m \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2m^2+2m-4 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{4} = \frac{-2 \pm 6}{4} \Rightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

b) Calculemos la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$: $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$

Por tanto: $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

c) No es posible pues para m = 1 no se puede calcular la matriz X.

2. *Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señala que dada la estructura de la empresa sólo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo A o de tipo B; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como el producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo B. ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben instalar en la empresa para maximizar su seguridad? Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

Sea x el número de alarmas del tipo A e y el de alarmas del tipo B. Se tiene: $x + y = 9 \Rightarrow y = 9 - x$

La función que expresa la seguridad según las alarmas colocadas es: $S = x \cdot y^2 = x \cdot (9-x)^2 = x \cdot (81 + x^2 - 18x)$ es decir: $S(x) = x^3 - 18x^2 + 81x$

Veamos para qué valor de x se maximiza la seguridad:

$$S'(x) = 3x^2 - 36x + 81 = 0 \Rightarrow x = \frac{36 \pm \sqrt{1296-972}}{6} = \frac{36 \pm 18}{6} = \begin{matrix} 9 \\ 3 \end{matrix}$$

$S''(x) = 6x - 36$: $S''(9) > 0 \Rightarrow$ mínimo $S''(3) < 0 \Rightarrow$ máximo

Por tanto, la seguridad es máxima con 3 alarmas del tipo A y 6 alarmas del tipo B.

3. *En una gran ciudad española la altura media de sus habitantes tiene una desviación típica de 8 cm. Se pide:*

a) Si la altura media de dichos habitantes fuera de 175 cm, ¿cuál sería la probabilidad de que la altura media de una muestra de 100 individuos tomada al azar fuera superior a 176 cm? Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(4 puntos)*
b) Si se considera una muestra aleatoria de 100 individuos de esta ciudad se obtiene una altura media de 178 cm. Determinar un intervalo de confianza del 95% para la altura media de los habitantes de esta ciudad. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Como el número de elementos de la muestra es suficientemente grande la distribución muestral de medias se aproxima a una normal:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 175\, cm \qquad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = 0{,}8$$

luego las medias muestrales $\overline{X}$ siguen una distribución normal $N\left(175\ ,\ 0{,}8\right)$

Tipificando el valor $\overline{X} = 176$ podemos utilizar las tablas de la normal $N\left(0\,,1\right)$:

$$p\left(\overline{X} > 176\right) = p\left(z > \frac{176-175}{0{,}8}\right) = p\left(z > 1{,}25\right) = 1 - \phi\left(1{,}25\right) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$$

b) Para un intervalo de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(178 - 1{,}96\cdot\frac{8}{\sqrt{100}}\ ,\ 178 + 1{,}96\cdot\frac{8}{\sqrt{100}}\right) = \left(176{,}432\ ,\ 179{,}568\right)$$

es decir, entre 176,432 cms y 179,568 cms