Septiembre 1999.

OPCIÓN A.

1. *En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla. Se pide:*

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana. *(5 puntos)*
b) Resolver el sistema planteado en el apartado anterior. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sean x = helados de vainilla, y = helados de chocolate, z = helados de nata. Se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ y+z=1{,}20x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ 1{,}20x-y-z=0 \end{cases}$$

b) Resolvamos el sistema por el método de Gauss (aplicar al sistema dado las transformaciones elementales necesarias hasta convertirlo en un sistema escalonado equivalente):

$$\begin{cases} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ 1{,}20x-y-z=0 \end{cases} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=110 \\ \quad y+2z=100 \\ -2{,}20y-2{,}20z=-132 \end{cases} \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=110 \\ \quad y+2z=100 \\ \quad 2{,}20z=88 \end{cases} \Rightarrow z=40 \ , \ y=20 \ , \ x=50$$

es decir: 50 helados de vainilla, 20 de chocolate y 40 de nata

Transformaciones elementales: (1) E_2-4E_1 , $E_3-1{,}20E_1$ (2) $E_3+2{,}20E_2$

2. *Dada la función* $f(x)=\dfrac{bx}{x^2+1}$ *con b un parámetro real distinto de 0. Se pide:*

a) Determinar las asíntotas de la función f(x) para cualquier valor del parámetro b. *(4 puntos)*
b) Determinar el valor del parámetro b para que la función f(x) tenga un máximo en el punto (1 , 3). *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) X Asíntotas verticales: no tiene pues $x^2+1\neq 0 \quad \forall x$

X Asíntotas horizontales: como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \Rightarrow$ y = 0 (eje de abscisas) es una asíntota horizontal de la función.

X Asíntotas oblicuas: no puede tener, pues una función tiene como máximo una sola asíntota entre horizontales y oblicuas.

b) Si la función tiene un máximo en el punto (1 , 3), se cumplirá: $f(1)=3$, $f'(1)=0$

De la primera condición se obtiene: $\dfrac{b}{2}=3 \Rightarrow b=6$ y no es necesario utilizar la segunda condición.

3. *En una baraja española de 40 cartas se extraen dos cartas al azar, calcular razonadamente:*

a) la probabilidad de que las dos sean copas. *(3 puntos)*
b) la probabilidad de que al menos una sea de oros. *(3 puntos)*
c) la probabilidad de que sean de diferentes palos. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

Extraer dos cartas equivale a extraer una y, sin reponerla, extraer otra.

a) $p\left(C_1 \cap C_2\right) = p\left(C_1\right) \cdot p\left(C_2 / C_1\right) = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39} = \dfrac{90}{1560} = 0{,}0577$

b) Calculemos primero la probabilidad de que ninguna de las cartas sea de oros: $p\left(\overline{O_1} \cap \overline{O_2}\right) = \dfrac{30}{40} \cdot \dfrac{29}{39} = \dfrac{870}{1560}$

El suceso “al menos una sea de oros” es el suceso contrario de “ninguna es de oros”. Por tanto:

$$p\,(\text{"}\textit{al menos una es de oros}\text{"}) = 1 - \frac{870}{1560} = \frac{690}{1560} = 0{,}4423$$

c) Es el suceso contrario a que sean del mismo palo. La probabilidad de que sean del mismo palo es $4 \cdot \dfrac{90}{1560} = \dfrac{360}{1560}$ luego la probabilidad de que sean de palos distintos es: $p\,(\text{"palos distintos"}) = 1 - \dfrac{360}{1560} = \dfrac{1200}{1560} = 0{,}7692$

Septiembre 1999.

OPCIÓN B.

1. *Un veterinario aconseja a un granjero dedicado a la cría de aves una dieta mínima que consiste en 3 unidades de hierro y 4 unidades de vitaminas diarias. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2,5 unidades de hierro y 1 de vitaminas y que cada kilo de pienso compuesto proporciona 1 de hierro y 2 de vitaminas. Sabiendo que el kilo de maíz vale 30 pesetas y el de pienso compuesto 52 pesetas, se pide:*

a) ¿Cuál es la composición de la dieta diaria que minimiza los costes del granjero?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(7 puntos)*
b) ¿Cambiaría la solución del problema si por escasez en el mercado el granjero no pudiera disponer de más de 1 kilo diario de pienso compuesto?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se trata de un problema de Programación Lineal. Elaboremos una tabla con los datos y condiciones del problema:

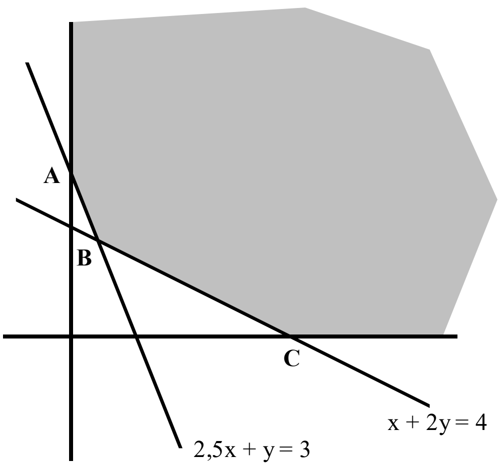
Alimento	**Cantidad**	**Hierro**	**Vitaminas**	**Precio**
maíz	x	2,5x	x	30x
pienso	y	y	2y	52y
	$x \geq 0$; $y \geq 0$	≥ 3	≥ 4	$f(x, y)$

X La función objetivo (mínima) es:

$$f(x, y) = 30x + 52y$$

X Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2{,}5x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases}$

Representemos gráficamente el conjunto de restricciones para encontrar la región factible:



X x = 0 es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.

X y = 0 es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.

X La recta $2{,}5x + y = 3$ pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(2, -2)$ (por ejemplo) y la solución de la inecuación $2{,}5x + y \geq 3$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

X La recta $x + 2y = 4$ pasa por los puntos $(4, 0)$ y $(0, 2)$ (por ejemplo) y la solución de la inecuación $x + 2y \geq 4$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

La región factible es abierta y aparece en gris.

La función objetivo se minimiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos sus coordenadas y el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

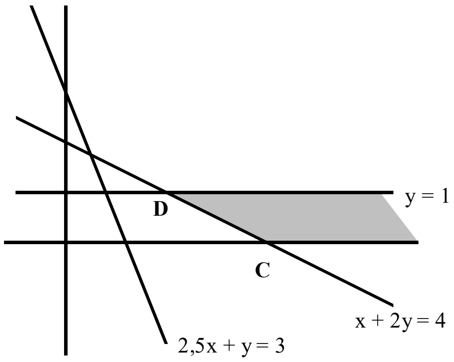
Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 2{,}5x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(0, 3) \Rightarrow f(0, 3) = 30 \cdot 0 + 52 \cdot 3 = 156$

Vértice B: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2{,}5x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) = 30 \cdot \frac{1}{2} + 52 \cdot \frac{7}{4} = 15 + 91 = 106$

Vértice C: $\begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(4, 0) \Rightarrow f(4, 0) = 120$

Por tanto, la función objetivo alcanza su valor mínimo en el vértice B, es decir, la dieta debe estar formada por medio kilo de maíz y un kilo y tres cuartos de pienso.

b) Si se añade la restricción $y \le 1$, la región factible cambia:



El nuevo vértice D tiene por coordenadas $(2,1)$ y la función objetivo vale en él: $f(2,1) = 30 \cdot 2 + 52 = 112$ que es menor que el valor que tiene en el vértice C. Por tanto, ahora la dieta más barata está formada por dos kilos de maíz y un kilo de pienso.

2. *Dada la función* $f(x) = -x^2 + x + 1$, *se pide:*

a) Determinar, en caso de que existan, los máximos y mínimos de la función f(x) en el intervalo $[-1,\ 4]$. *(4 puntos)*

b) Calcular el área del recinto limitado por: y = f(x) , y = f'(x). Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(6 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x) = -2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (punto crítico). Como $f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ en $x = \frac{1}{2}$ la función tiene un máximo.

b) Consideremos la función diferencia: $f(x) - f'(x) = -x^2 + x + 1 + 2x - 1 = -x^2 + 3x$

Los puntos de corte de esta función con el eje de abscisas son: $-x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (-x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0\ ,\ x = 3$

$$\int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \left(-\frac{27}{3} + \frac{27}{2}\right) - 0 = -\frac{54}{6} + \frac{81}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \Rightarrow S = \frac{9}{2}u^2$$

3. *Una moneda está trucada de manera que 20 de cada 100 veces que se lanza sale cara. Se pide:*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar la moneda salga cara?, ¿y de que salga cruz?. *(2 puntos)*

b) ¿Cuántas veces se ha de lanzar esta moneda como mínimo para que la proporción de caras obtenidas no difiera de la proporción verdadera en más de un 2% con un nivel de confianza del 95%?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(8 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $p(C) = \frac{20}{100} = 0{,}2$ y $p(X) = 0{,}8$

b) La proporción de caras es de 0,2 y la proporción de cruces de 0,8.

Para un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

La cota de error (error máximo admisible) es de 0,02.

Por tanto: $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot p \cdot (1-p)}{E^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}02^2} = 1536{,}64$ luego se habrá de lanzar un mínimo de 1537 veces.