**Junio 1998.**

## OPCIÓN A.

**1.** *a) Considerar una matriz A de orden* $m \times n$ *con* $m \neq n$. *Razonar si se puede calcular la expresión* $A \cdot A^t - A^t \cdot A$ *siendo* $A^t$ *la matriz traspuesta de A.* *(4 puntos)*

*b) Considerar la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *resolver por el método de Gauss:*

*i) el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es* $A^t.A$ *(4 puntos)*
*ii) el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es* $A.A^t$ *(2 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) Si A es de orden $m \times n$, $A^t$ es de orden $n \times m$ por lo que $A \cdot A^t$ será de orden $m \times m$ y $A^t \cdot A$ de orden $n \times n$ y no podrán restarse las matrices $A \cdot A^t$ y $A^t \cdot A$ por ser de órdenes distintos.

b) i)

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 5x + 2y + z = 0 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -y - 3z = 0 \\ -3y - 9z = 0 \end{cases} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \lambda \;,\; y = -3\lambda \;,\; z = \lambda}$$

Transformaciones elementales:
(1) Cambio de orden de las ecuaciones.
(2) $E_2 - 2E_1$ , $E_3 - 5E_1$
(3) $E_2 \cdot (-1)$ , $E_3 : (-3)$
(4) Eliminación de la tercera ecuación por ser igual que la segunda

ii)

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 6y = 0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 6y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 6y = 0 \\ -11y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0 \;,\; y = 0}$$

Transformaciones elementales: (1) Cambio de orden de las ecuaciones (2) $E_2 - 2E_1$

**2.** *Dada la función* $f(x) = 2x^2 + 4 \ln x$, *se pide:*

*a) ¿Cuál es el dominio de definición de f(x)?.* *(1 punto)*
*b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). Razonar si existen máximo y mínimo y, en caso afirmativo, calcularlos.* *(3 puntos)*
*c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad de f(x). Razonar si existen puntos de inflexión y, en caso afirmativo, calcularlos.* *(4 puntos)*
*d) Determinar, si existen, las asíntotas de f(x).* *(2 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) Dom (f) = $\Re^+$ pues es el dominio de la función y = ln x

b) • Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$$f'(x) = 4x + \frac{4}{x} = \frac{4x^2+4}{x} = \frac{4\left(x^2+1\right)}{x} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{la función es creciente } \forall x \in Dom\,(f)$$

• No existen máximos ni mínimos pues $f'(x) \neq 0 \;\; \forall x$

c) • $f''(x) = \dfrac{8x^2 - 4x^2 - 4}{x^2} = \dfrac{4x^2-4}{x^2} = \dfrac{4\left(x^2-1\right)}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) < 0 \text{ para x} \in (0\,,1) \Rightarrow f(x) \text{ convexa en } (0\,,1) \\ f''(x) > 0 \text{ para x} \in (1\,,\infty) \Rightarrow f(x) \text{ cóncava en } (1\,,\infty) \end{cases}$

• Un punto de inflexión verifica: $f''(x) = 0$ y $f'''(x) \neq 0$ :

Tenemos: $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ (posible punto de inflexión)

$f'''(x) = \dfrac{8x^3 - \left(4x^2-4\right)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{8x^3 - 8x^3 + 8x}{x^4} = \dfrac{8}{x^3} \Rightarrow f'''(1) \neq 0 \Rightarrow (1\,,2)$ es un punto de inflexión de f(x).

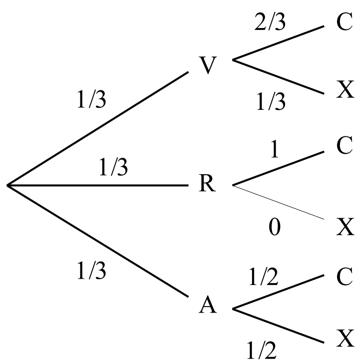
d) Puesto que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0^+$ es una asíntota vertical de la función.

**3.** *Tenemos tres cajas, una verde, una roja y una amarilla, y en cada caja hay una moneda. La de la caja verde está trucada y la probabilidad de que salga cara es el doble de la probabilidad de que salga cruz, la moneda de la caja roja tiene dos caras y la de la caja amarilla no está trucada. Se toma una caja al azar y se lanza la moneda que está en esa caja. Calcular razonadamente:*

*a) La probabilidad de que salga cara.* *(5 puntos)*
*b) La probabilidad de que sabiendo que ha salido cara, se haya lanzado la moneda de la caja roja.* *(5 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

Construyamos el diagrama en árbol de la situación:




a) Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(C) = p(V)\cdot p(C/V) + p(R)\cdot p(C/R) + p(A)\cdot p(C/A) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{18} + \frac{6}{18} + \frac{3}{18} = \frac{13}{18} \cong 0{,}72$$

b) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p(R/C) = \frac{p(R)\cdot p(C/R)}{p(V)\cdot p(C/V) + p(R)\cdot p(C/R) + p(A)\cdot p(C/A)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{13}{18}} = \frac{18}{39} \cong 0{,}46$$

**Junio 1998.**

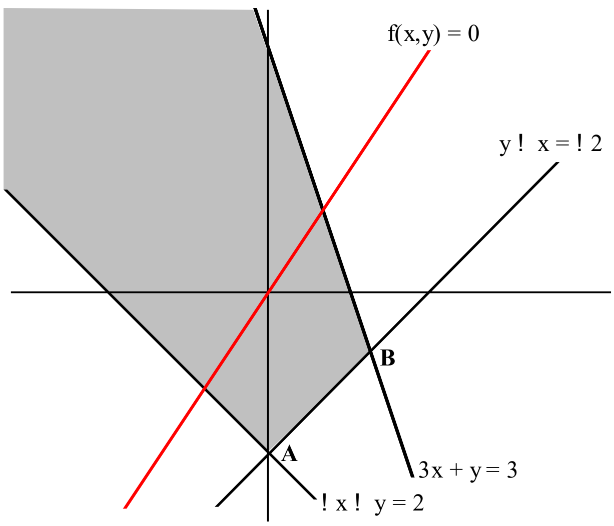
**OPCIÓN B.**

**1.** *Considerar las inecuaciones:* $y - x \geq -2$ ; $-x - y \leq 2$ ; $3x + y \leq 3$ . *Se pide:*

*a) Representar gráficamente el conjunto S definido por estas inecuaciones.* *(3 puntos)*
*b) Determinar si f(x , y) = 3x– 2y alcanza un valor máximo y un valor mínimo en S y, en caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos donde se alcanzan.* *(3,5 puntos)*
*c) Determinar si f(x , y) = –6x + 4y alcanza un valor máximo y un valor mínimo en S y, en caso afirmativo, calcular dichos valores y los puntos donde se alcanzan.* *(3,5 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) - La recta $y - x = -2$ pasa por los puntos $(2, 0)$ y $(0, -2)$ (por ejemplo). La inecuación $y - x \geq -2$ tiene por solución el semiplano que contiene al origen de coordenadas.




- La recta $-x - y = 2$ pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(0, -2)$ (por ejemplo). La inecuación $-x - y \leq 2$ tiene por solución el semiplano que contiene al origen de coordenadas.

- La recta $3x + y = 3$ pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(0, 3)$ (por ejemplo). La inecuación $3x + y \leq 3$ tiene por solución el semiplano que contiene al origen de coordenadas.

El conjunto S es una región abierta (en gris) cuyos vértices son:

Vértice A: $A(0, -2)$

Vértice B: $\begin{cases} y - x = -2 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

b) Representamos la recta $f(x, y) = 0$ , es decir: $3x - 2y = 0$ que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(2, 3)$. Al desplazarla paralelamente a sí misma hacia la derecha, el vértice más alejado de S donde toca es el $B\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ que es donde alcanza el valor máximo. En cambio, si la desplazamos hacia su izquierda, no toca a ningún vértice de S lo que significa que la función no alcanza su valor mínimo en S.

c) La recta que representa a $f(x, y) = 0$ es la misma que en el apartado anterior pero la función es opuesta (y multiplicada por 2) que la de dicho apartado. Esta función alcanza su valor mínimo en el vértice $B\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ y no alcanza, en cambio, un valor máximo.

**2.** *a) Un cultivador de frutas cítricas estima que si plantan 60 naranjos en un huerto, la producción media por árbol será de 400 naranjas y ésta disminuirá en un promedio de 5 naranjas por árbol por cada árbol adicional plantado en el huerto. Se pide:*

*i) Determinar la función de producción total de naranjas.* *(2 puntos)*
*ii) ¿Cuántos árboles se deben plantar en el huerto para maximizar la producción total de naranjas?, ¿cuál es dicha producción máxima?. Razonar la respuesta.* *(4 puntos)*

*b) Calcular el área limitada por la gráfica de la función $y=\sqrt{x}$ y las rectas x = 0, x = 1, y = 0.* *(4puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) i) Se tiene:

| **Nº árboles** | 60 | 60 + 1 | 60 + 2 | 60 + x |
|---|---|---|---|---|
| **producción** | $60\cdot 400$ | $(60+1)\cdot(400-5)$ | $(60+2)\cdot(400-5\cdot 2)$ | $(60+x)\cdot(400-5x)$ |

es decir, si llamamos x al nº de árboles que exceden de los 60, la función que relaciona la producción con el número de árboles es:

$$f(x)=(60+x)\cdot(400-5x)=24000-300x+400x-5x^2=-5x^2+100x+24000$$

es decir, se trata de una función cuadrática.

ii) Veamos para qué valor de x se maximiza la función anterior: $f'(x)=-10x+100=0\ \Rightarrow\ x=10$
$f''(x)=-10<0\ \Rightarrow\ f(x)$ *máxima*

luego se deben plantar 70 árboles.

La producción máxima será entonces: $f(10)=-500+1000+24000=24500$ naranjas.

b) $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=\left[\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\dfrac{2}{3}\ \Rightarrow\ S=\dfrac{2}{3}\ u^2$

**3.** *La desviación típica de la altura de los habitantes de un país es de 10 centímetros. Calcular el tamaño mínimo que ha de tener una muestra de habitantes de dicho país para que el error cometido al estimar la altura media sea inferior a 1 centímetro con un nivel de confianza del 99%. ¿Y si el nivel de confianza es del 95%?. Explicar los pasos seguidos para obtener las respuestas.* *(10 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

Desviación típica poblacional: $\sigma=10$ cm

Para un nivel de confianza del 99%, el valor crítico es $z_{\alpha/2}=2{,}575$

El error máximo admisible es E = 1. Se tiene: $E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \Rightarrow\ n=\dfrac{z_{\alpha/2}^2\cdot\sigma^2}{E^2}=\dfrac{2{,}575^2\cdot 100}{1^2}=663{,}06$

Luego el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 664 habitantes.

- En el caso de un nivel de confianza del 95%, el valor crítico es $z_{\alpha/2}=1{,}96$ con lo que se tiene:

$n=\dfrac{1{,}96^2\cdot 100}{1^2}=384{,}16\ \Rightarrow$ la muestra debe contener un mínimo de 385 habitantes.