Septiembre 1998.

OPCIÓN A.

1. *Se considera un número de tres cifras del que se sabe que la suma de sus tres cifras es 12, el doble de la cifra de las decenas es igual a la suma de las otras dos cifras y, por último, se sabe que la cifra de las centenas es tres más la mitad de la cifra de las decenas. Se pide:*

a) Plantear un sistema de ecuaciones lineales con el que se determine dicho número. *(3 puntos)*
b) Resolver, utilizando el método de Gauss, el sistema de ecuaciones lineales planteado en el apartado a). *(4 puntos)*
c) ¿Cuál es la solución del problema si no se considera la última condición?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sea x la cifra de las centenas, y la de las decenas, z la de las unidades. Se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ 2y=x+z \\ x=3+\dfrac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ x-2y+z=0 \\ 2x-y=6 \end{cases}$$

b) El método de Gauss consiste en utilizar las transformaciones elementales para convertir el sistema en otro escalonado equivalente:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ x-2y+z=0 \\ 2x-y=6 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=12 \\ -3y=-12 \\ -3y-2z=-18 \end{cases} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=12 \\ -3y \qquad =-12 \\ \qquad -2z=-6 \end{cases} \Rightarrow z=3\ ,\ y=4\ ,\ x=5 \Rightarrow \text{el número es 543}$$

Transformaciones elementales: (1) E_2-E_1 , E_3-2E_1 (2) E_3-E_2

c) Al no considerar la última condición, el sistema está formado por dos ecuaciones y tiene tres incógnitas:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z=12 \\ -3y \qquad =-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-\lambda \\ y=4 \\ z=\lambda \end{cases}$$

es decir, el número debe quedar en función de una de sus cifras (de las unidades, por ejemplo) aunque la de las decenas es 4.

2. *Sea la función* $f(x)=\begin{cases} e^{2x} & \text{si } x<0 \\ x^2+a & \text{si } 0\le x\le 3 \\ \dfrac{x+5}{x-3} & \text{si } x>3 \end{cases}$ *con a un parámetro real. Se pide:*

a) Determinar, razonadamente, el valor del parámetro a para que f(x) sea continua en x = 0. *(3 puntos)*
b) ¿Para qué valores del parámetro a es continua f(x) en x = 3?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*
c) Determina el valor del parámetro a para que $\int_0^3 f(x)\,dx=15$ *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Para que la función sea continua en x = 0 debe ser $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Para verificar esta condición debe cumplirse:

i) $\exists\, f(0)=a$

ii) $\exists \lim\limits_{x \to 0} f(x) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x \to 0} e^{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 + a\right) \;\Leftrightarrow\; 1 = a$

iii) Para a = 1 se verifica: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

es decir, para que la función sea continua en x = 0 debe ser a = 1.

b) Debe ocurrir que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$:

i) $\exists\, f(3) = 9 + a$

ii) $\exists \lim\limits_{x \to 3} f(x) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x \to 3} \left(x^2 + a\right) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+5}{x-3} \;\Leftrightarrow\; 9 + a = \infty \;\Rightarrow$ no existe valor de a para el que $\exists \lim\limits_{x \to 3} f(x)$ y por tanto, la función no es continua en x = 3 (a la derecha de x = 3 la función tiene una asíntota vertical)

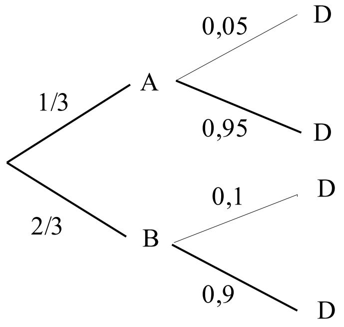
c) $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \left(x^2 + a\right)dx = \left[\dfrac{x^3}{3} + ax\right]_0^3 = 9 + 3a = 15 \;\Rightarrow\; a = 2$

3. *En una tienda de electrodomésticos se venden dos marcas, A y B. Se ha comprobado que un tercio de los clientes elige un electrodoméstico de la marca A y el resto uno de la B. Además, la probabilidad de que un electrodoméstico de la marca A sea defectuoso es 0,05 y la probabilidad de que uno de la marca B no lo sea es 0,9. Calcular razonadamente:*

a) la probabilidad de que un cliente compre un electrodoméstico en dicha tienda y le salga defectuoso. *(5 puntos)*
b) la probabilidad de que el electrodoméstico comprado sea de la marca B, sabiendo que no es defectuoso. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Organicemos el diagrama en árbol de la situación:



Se tiene:

a) Aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(D) = p(A)\cdot p(D/A) + p(B)\cdot p(D/B) = \frac{1}{3}\cdot 0{,}05 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}1 = 0{,}083$$

b) Aplicación del teorema de Bayes:

$$p\left(B/\overline{D}\right) = \frac{p(B)\cdot p\left(\overline{D}/B\right)}{p(A)\cdot p\left(\overline{D}/A\right) + p(B)\cdot p\left(\overline{D}/B\right)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}9}{\frac{1}{3}\cdot 0{,}95 + \frac{2}{3}\cdot 0{,}9} = \frac{0{,}6}{0{,}916} \cong 0{,}65$$

Septiembre 1998.

OPCIÓN B.

1. *Una empresa que fabrica motos y coches en dos factorías F_1 y F_2, ha recibido un pedido de 300 coches y 500 motos. En la factoría F_1 se producen 10 coches y 25 motos por hora y en la F_2 se producen 20 coches por hora y el mismo número de motos por hora que en la otra. Sabiendo que los costes operativos de las factorías F_1 y F_2 son 9.000 y 7.000 unidades monetarias por hora respectivamente, se pide:*

a) ¿Cuántas horas debe trabajar cada factoría para servir el pedido con los mínimos costes?, ¿cuál es el valor de estos mínimos costes?. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta. *(8 puntos)*
b) Suponer que la empresa decide que el número de horas trabajadas entre las dos factorías para servir un pedido no puede ser superior a 50. ¿Cambiaría la solución del problema? Razonar la respuesta. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Se trata de un problema de programación lineal. Debemos construir la función objetivo y las restricciones a las que está sometida. Para ayudarnos, organicemos los datos y condiciones en forma de tabla:

factoría	nº horas	coches	motos	costes
F_1	x	10x	25x	9000x
F_2	y	20y	25y	7000y
	$x \geq 0$, $y \geq 0$	≥ 300	≥ 500	$f(x, y)$

La función objetivo (minimizar) es: $f(x, y) = 9000x + 7000y$

Las restricciones son: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10x + 20y \geq 300 \\ 25x + 25y \geq 500 \end{cases}$

Resolvamos gráficamente el sistema de inecuaciones para obtener la región factible:

- La recta x = 0 es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.
- La recta y = 0 es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.
- La recta $10x + 20y = 300$ pasa por los puntos $(30, 0)$ y $(0, 15)$ (por ejemplo). La solución de $10x + 20y \geq 300$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.
- La recta $25x + 25y = 500$ pasa por los puntos $(20, 0)$ y $(0, 20)$ (por ejemplo). La solución de $25x + 25y \geq 500$ es el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.

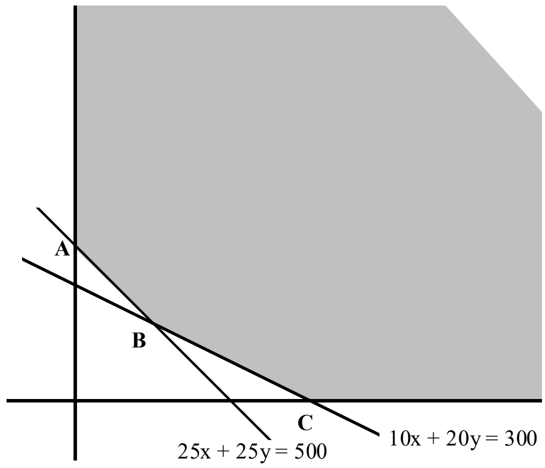


Fig. 1

La región factible (fig. 1) es abierta (en gris) y tiene por vértices los puntos A, B y C. La función objetivo se minimiza en alguno de dichos vértices. Calculemos sus coordenadas y el valor de $f(x, y)$ en los mismos:

Vértice A: $A(0, 20) \Rightarrow f(0, 20) = 140000$
Vértice B:
$\begin{cases} 10x + 20y = 300 \\ 25x + 25y = 500 \end{cases} \Rightarrow B(10, 10) \Rightarrow f(10, 10) = 160000$
Vértice C: $C(30, 0) \Rightarrow f(30, 0) = 270000$

Luego la solución más adecuada es que la factoría F_1 no trabaje y la F_2 dedique 20 horas. Los costes mínimos son de 140000 unidades monetarias.

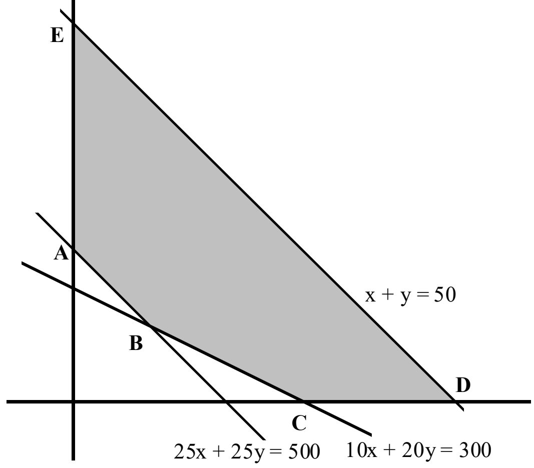


Fig. 2

b) Hay que añadir al conjunto de restricciones la inecuación $x+y\leq 50$. La recta $x+y=50$ pasa por los puntos $(50\,,0)$ y $(0\,,50)$ y la solución de la inecuación $x+y\leq 50$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas. La nueva región factible es la señalada en gris en la figura 2. Los nuevos vértices son:

$$D(50\,,0)\ \Rightarrow\ f(50\,,0)=450000 \quad \text{y} \quad E(0\,,50)\ \Rightarrow\ f(0\,,50)=350000$$

Comparando el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible, se concluye que la solución que minimiza los costes sigue siendo la misma que antes.

2. *Sea la función* $f(x)=\dfrac{x^2}{x+4}$. *Se pide:*

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x). Razonar si existen máximos y mínimos y, en caso de que existan, calcularlos. *(5 puntos)*
b) ¿Tiene f(x) puntos de inflexión?. Justificar la respuesta. *(2 puntos)*
c) Determinar, si existen, las asíntotas de f(x). *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $f'(x)=\dfrac{2x\cdot(x+4)-x^2}{(x+4)^2}=\dfrac{x^2+8x}{(x+4)^2}=\dfrac{x\cdot(x+8)}{(x+4)^2}\ \Rightarrow$

f´(x) > 0   f´(x) < 0   f´(x) > 0
! 8   0

luego la función es creciente en $(-\infty\,,-8)\text{Y}(0\,,\infty)$ y decreciente en $(-8\,,0)$

Los posibles puntos de máximo o de mínimo verifican $f'(x)=0\ \Rightarrow\ x=-8$ y $x=0$. Sustituyendo estos valores en $f''(x)$ comprobaremos el tipo de extremos relativos que son:

$$f''(x)=\frac{(2x+8)\cdot(x+4)^2-(x^2+8x)\cdot 2(x+4)}{(x+4)^4}=\frac{(x+4)\cdot\left[(2x+8)\cdot(x+4)-2(x^2+8x)\right]}{(x+4)^4}=\frac{2x^2+8x+8x+32-2x^2-16x}{(x+4)^3}=$$

$$=\frac{32}{(x+4)^3}\ \Rightarrow\ \begin{cases} f''(-8)<0 \\ f''(0)>0 \end{cases}$$ luego en $(-8\,,-16)$ la función tiene un máximo relativo y en $(0\,,0)$ un mínimo relativo.

b) No tiene puntos de inflexión pues $f''(x)\neq 0\ \ \forall x$ y un punto de inflexión debe anular la segunda derivada.

c) • Asíntota vertical: $x=-4$ pues $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2}{x+4}=\infty$. Además: $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{x^2}{x+4}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x^2}{x+4}=+\infty$

• Asíntota oblicua: dividiendo x^2 entre x+4 se tiene: $\dfrac{x^2}{x+4}=x-4+\dfrac{16}{x+4}\ \Rightarrow\ y=x-4$ es una asíntota oblicua de la función. Además: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{16}{x+4}=0^-$ y $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{16}{x+4}=0^+$

3. *El peso de las naranjas producidas en una determinada región sigue una distribución normal con una desviación típica de 15 gramos. Un almacenista compra 10.000 de estas naranjas y observa que su peso medio es de 190 gramos. Razonar si se puede afirmar, con un nivel de significación del 0,05 que el peso medio de las naranjas producidas en esta región es de 200 gramos. Explicar los pasos seguidos para obtener la respuesta.* *(10 puntos)*

SOLUCIÓN.

$E=z_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}96\cdot\dfrac{15}{\sqrt{10000}}=0{,}294\ \Rightarrow$ el intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(190-0{,}294\ \ ,\ \ 190+0{,}294)=(189{,}706\ \ ,\ \ 190{,}294).$$

Como $200\notin(189{,}706\ \ ,\ \ 190{,}294)$ no se puede hacer esa afirmación.