**Septiembre 1996.**

## OPCIÓN A.

**1.** *En un hospital se quiere elaborar una dieta alimenticia para un determinado grupo de enfermos con dos alimentos A y B. Estos alimentos contienen tres principios nutritivos: $N_1$, $N_2$ y $N_3$. Una unidad de A vale 100 pesetas y contiene 2 unidades de $N_1$, 1 de $N_2$ y 1 de $N_3$. Una unidad de B vale 240 pesetas y contiene 1, 3 y 2 unidades de $N_1$, $N_2$ y $N_3$ respectivamente.*

*Un enfermo de este grupo necesita diariamente al menos 4, 6 y 5 unidades de $N_1$, $N_2$ y $N_3$ respectivamente. Se pide:*

*a) Plantear un problema de programación lineal que permita determinar las cantidades de alimento A y B que dan lugar a la dieta de coste mínimo.* *(5 puntos)*
*b) Resolver el problema planteado en el apartado anterior.* *(5 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) Organicemos los datos y condiciones del problema en una tabla para facilitar el análisis de la situación y escribir la función objetivo y sus restricciones:

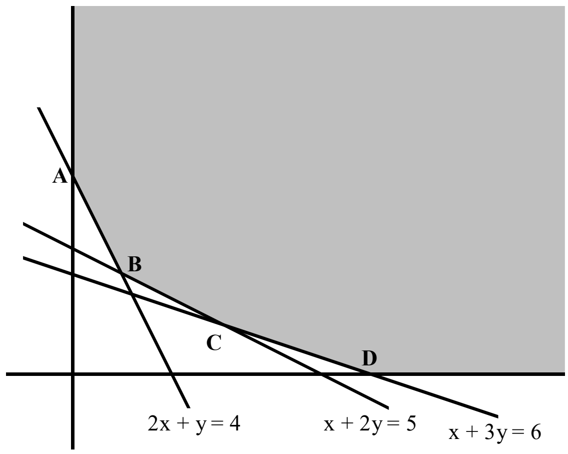
| Alimento | Cantidad | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | Coste |
|---|---|---|---|---|---|
| A | x | 2x | x | x | 100x |
| B | y | y | 3y | 2y | 240y |
| | $x \geq 0$ , $y \geq 0$ | $\geq 4$ | $\geq 6$ | $\geq 5$ | $f(x, y)$ |

Función objetivo (minimizar): $f(x, y) = 100x + 240y$

Restricciones: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 4 \\ x + 3y \geq 6 \\ x + 2y \geq 5 \end{cases}$

b) Representemos gráficamente las restricciones para dibujar la región factible:

- La recta x = 0 es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $x \geq 0$ es el semiplano de la derecha.
- La recta y = 0 es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $y \geq 0$ es el semiplano superior.
- La recta $2x + y = 4$ pasa por los puntos $(0, 4)$ y $(2, 0)$ (por ejemplo) y la inecuación $2x + y \geq 4$ tiene por solución el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.
- La recta $x + 3y = 6$ pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(6, 0)$ (por ejemplo) y la inecuación $x + 3y \geq 6$ tiene por solución el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.
- La recta $x + 2y = 5$ pasa por los puntos $(5, 0)$ y $(1, 2)$ (por ejemplo) y la inecuación $x + 2y \geq 5$ tiene por solución el semiplano al que no pertenece el origen de coordenadas.




La función objetivo alcanza su mínimo en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos las coordenadas de dichos vértices y el valor de la función objetivo en los mismos:

Vértice A: $A(0, 4) \Rightarrow f(0, 4) = 240 \cdot 4 = 960$

Vértice B: $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(1, 2) \Rightarrow f(1, 2) = 100 + 240 \cdot 2 = 580$

Vértice C: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow C(3, 1) \Rightarrow f(3, 1) = 100 \cdot 3 + 240 = 540$

Vértice D: $D(6, 0) \Rightarrow f(6, 0) = 100 \cdot 6 = 600$

La función objetivo tiene su mínimo en el vértice C, luego conviene preparar 3 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento B.

**2.** *Considerar la función* $f(x) = x^3 - 3x$ *. Se pide:*

*a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Razonar si existen máximos y mínimos y, en caso afirmativo, calcularlos.* *(3 puntos)*
*b) Razonar si existen puntos de inflexión. En caso de que existan, calcularlos.* *(2 puntos)*
*c) Calcular el área de la superficie comprendida entre la gráfica f(x) y el eje OX.* *(5 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ (puntos donde cambia el signo de $f'(x)$ y posibles puntos de máximo y mínimo relativos).

Se tiene:

| $f'(x) > 0$ | | $f'(x) < 0$ | | $f'(x) > 0$ |
|---|---|---|---|---|
| | $-1$ | | $1$ | |

$\Rightarrow$ la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y decreciente en $(-1, 1)$.

Como la función es polinómica y por tanto continua, debe tener un máximo en $x = -1$ (pasa de creciente a decreciente) y un mínimo en $x = 1$ (pasa de decreciente a creciente): Máximo en $(-1, 2)$ y mínimo en $(1, -2)$.

b) Un punto de inflexión se caracteriza por: $f''(x) = 0$ y $f'''(x) \neq 0$.

$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ y como $f'''(x) = 6 \neq 0 \ \forall x$ la función tiene un punto de inflexión en x = 0: $(0, 0)$

c) Los puntos de corte de la función y el eje de abscisas son:

$x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = -\sqrt{3} \ , \ x = \sqrt{3}$

Se tiene: $\int (x^3 - 3x)\,dx = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3x^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = \left[\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3x^2}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^{0} = 0 - \left(\dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{9}{4} \\ S_2 = \left|\left[\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3x^2}{2}\right]_{0}^{\sqrt{3}}\right| = \left|\left(\dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2}\right) - 0\right| = \left|-\dfrac{9}{4}\right| = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

Por tanto: $S = S_1 + S_2 = \dfrac{18}{4} = \dfrac{9}{2} u^2$

**3.** *La probabilidad de que un estudiante de Economía obtenga el título de economista es de 0,6. Calcular la probabilidad de que de un grupo de tres estudiantes matriculados en Economía:*

*a) Los tres obtengan el título.* *(2,5 puntos)*
*b) Ninguno obtenga el título.* *(2,5 puntos)*
*c) Al menos uno obtenga el título.* *(2,5 puntos)*
*d) Sólo uno obtenga el título.* *(2,5 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

Se trata de una binomial $B(3 \ , \ 0{,}6)$:

a) $p(\text{"tres éxitos"}) = \dbinom{3}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^0 = 0{,}216$

b) $p(\text{"cero éxitos"}) = \dbinom{3}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}064$

c) El suceso "al menos uno obtiene título" es el contrario del suceso "ninguno obtiene título". Por tanto:

$p(\text{"al menos uno obtiene título"}) = 1 - 0{,}064 = 0{,}936$

d) $p(\text{"un éxito"}) = \dbinom{3}{1} \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^2 = 3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}16 = 0{,}288$

**Septiembre 1996.**

**OPCIÓN B.**

**1.** *Considerar las matrices* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Se pide:*

*a) Comprobar que no se cumple la siguiente igualdad: $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$. ¿Cuál es la razón de que no se cumpla?* *(6 puntos)*

*b) Considerar el sistema de ecuaciones lineales* $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Discutir si existe solución y, en caso afirmativo, resolverlo. Interpretar geométricamente el sistema.* *(4 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) $(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (1)

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ ; $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

luego: $A^2 + B^2 + 2AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (2)

Como se observa: $(1) \neq (2)$. La razón es que el producto de matrices no es conmutativo $A \cdot B \neq B \cdot A$ y por tanto:

$$(A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

b) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución).

Las ecuaciones representan a dos rectas paralelas.

**2.** *La función de beneficios de una empresa es* $B(x) = \dfrac{3x - 6}{x + 1}$ *donde x representa los años de vida de la empresa ( $x \geq 0$ ) y B(x) está expresado en millones de pesetas. Se pide:*

*a) Determinar cuándo la empresa tiene ganancias y cuándo pérdidas.* *(3 puntos)*
*b) Determinar si B(x) tiene máximos, mínimos y puntos de inflexión en su dominio de definición.* *(4 puntos)*
*c) ¿Están los beneficios limitados?. Razonar la respuesta. Si lo están, ¿cuál es su límite?.* *(3 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

a) Se trata de ver para qué valores de x la función B(x) es positiva o negativa: $B(x) = \dfrac{3x-6}{x+1} = 0 \Rightarrow x = 2$

Para $x < 2$: $B(x) < 0$ luego en los dos primeros años la empresa tiene pérdidas.
Para $x > 2$: $B(x) > 0$ luego a partir del segundo año la empresa tiene ganancias.

b) $B'(x) = \dfrac{3 \cdot (x+1) - (3x-6)}{(x+1)^2} = \dfrac{9}{(x+1)^2} > 0 \;\; \forall x \;\; \Rightarrow$ la función es siempre creciente y no tiene máximos ni mínimos.

Veamos si tiene puntos de inflexión: $B''(x) = \dfrac{-9 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{-18}{(x+1)^3} \neq 0 \;\; \forall x \;\; \Rightarrow$ la función no tiene p. de inflexión.

c) Puesto que la función es creciente, veamos qué pasa cuando el tiempo tienda a infinito:

$\underset{x \to \infty}{lím} \dfrac{3x-6}{x+1} = 3$ luego los beneficios se aproximarán a tres millones de pesetas pero no serán mayores.

**3.** *En una gran empresa, la desviación típica de la edad de sus trabajadores es de 6 años. Se considera una muestra aleatoria de 100 trabajadores que revela una media de edad de 38 años. Determina un intervalo de confianza del 95% para la edad media de los trabajadores de dicha empresa. Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta.*

*(10 puntos)*

**SOLUCIÓN.**

La desviación típica poblacional es $\sigma = 6$ años.

Para un intervalo de confianza del 95% el valor crítico que debemos utilizar es: $z_{\alpha/2} = 1{,}96$ .

Calculemos el error máximo admisible (radio del intervalo): $E = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{6}{\sqrt{100}} = 1{,}176$

El intervalo de confianza para la edad media de la población, a partir de la obtenida en la muestra es:

$\left(\mu_{\overline{X}} - E \;,\; \mu_{\overline{X}} + E\right) = \left(38 - 1{,}176 \;,\; 38 + 1{,}176\right) = \left(36{,}824 \;,\; 39{,}176\right)$ es decir, la edad media estará comprendida entre

36,824 y 39,176 años.