Junio 1995

OPCIÓN A.

1. *Los alumnos de un conservatorio de música deciden formar una orquesta. Los gustos del público exigen que haya siempre mayor o igual número de instrumentos de cuerda que de viento, y que el número de instrumentos de cuerda no debe superar el doble del número de instrumentos de viento. En total hay disponibles 20 instrumentos de viento y 30 de cuerda. Los empresarios pagan a la orquesta 25.000 pesetas por cada instrumento de viento y 20.000 por cada uno de cuerda. Se pide:*

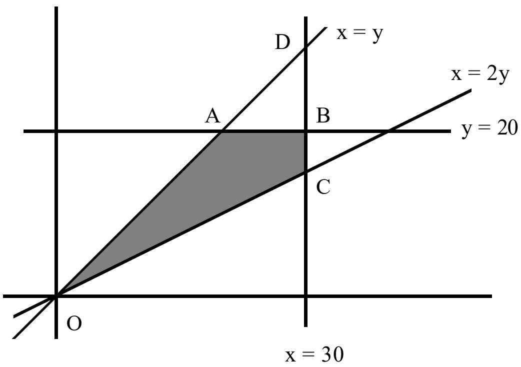
a) ¿De cuántos instrumentos de cuerda y cuántos de viento se debe componer la orquesta para obtener el máximo beneficio? *(6 puntos)*
b) Si se suprime la restricción del número total disponible de instrumentos de viento ¿varía la respuesta en el apartado a)?. Razonar la respuesta. En caso de que varíe, calcular la nueva solución. *(2 puntos)*
c) Si se suprime tanto la restricción del número total disponible de instrumentos de viento como de cuerda ¿qué ocurre con el beneficio?. Razonar la respuesta. *(2 puntos)*

SOLUCIÓN.

Instrumentos	**Número**	**Beneficio**
Cuerda	x	20000x
Viento	y	25000y

Función objetivo (máxima): F (x , y) = 20000x + 25000y
Restricciones:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq y \\ x \leq 2y \\ y \leq 20 \\ x \leq 30 \end{cases}$$

a) Representemos la región factible y calculemos las coordenadas de sus vértices:



Vértice O: O (0 , 0)

Vértice A: $\begin{cases} x = y \\ y = 20 \end{cases} \Rightarrow x = 20, y = 20 \Rightarrow A(20, 20)$

Vértice B: $\begin{cases} y = 20 \\ x = 30 \end{cases} \Rightarrow B(30, 20)$

Vértice C: $\begin{cases} x = 30 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow C(30, 15)$

La solución al problema son las coordenadas de alguno de los vértices de la región factible. Calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos para comprobar en cuál alcanza el mayor valor:

F (0 , 0) = 0 , F (20 , 20) = 900 000 , F (30 , 20) = 1 100 000 , F (30 , 15) = 975 000 luego el número de instrumentos más adecuado es 30 de cuerda y 20 de viento.

b) Si se suprime la restricción $y \leq 20$, la solución la tendremos en el vértice D de la nueva región factible ODC. Es decir: 30 instrumentos de cada clase.

c) Si además se suprime la restricción $x \leq 30$, la región factible es abierta y el beneficio máximo no se alcanzaría nunca pues bastaría con añadir más instrumentos de cada clase para que aumentara.

2. *a) Considerar la función $f(x) = x^3 + ax + b$ siendo a, b 0 ⁄ Hallar a y b para que f(x) tenga un mínimo en el punto (1 ,1). Razonar la respuesta..* *(5 puntos)*

b) Considerar la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$. Razonar si existen máximos, mínimos y puntos de inflexión; en caso de que existan, calcularlos. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Tenemos: $f(x) = x^3 + ax + b \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 + a$

Si el punto (1 ,1) es un mínimo de la función $\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a + b = 1 \\ 3 + a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -3 \;,\; b = 3$

b) Calculemos f´(x) y f´´(x):

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - x^2 \cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{-8x}{\left(x^2-4\right)^2} \;\Rightarrow\; f''(x) = \frac{-8\left(x^2-4\right)^2 + 8x \cdot 2\left(x^2-4\right) \cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(x^2-4\right)\left[-8x^2 + 32 + 32x^2\right]}{\left(x^2-4\right)^4} = \frac{24x^2 + 32}{\left(x^2-4\right)^3}$$

Los posibles máximos y mínimos son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, que en este caso es x = 0. Sustituimos x = 0 en la segunda derivada y tenemos: $f''(0) < 0$ por lo que la función tiene un máximo en (0 , 0).

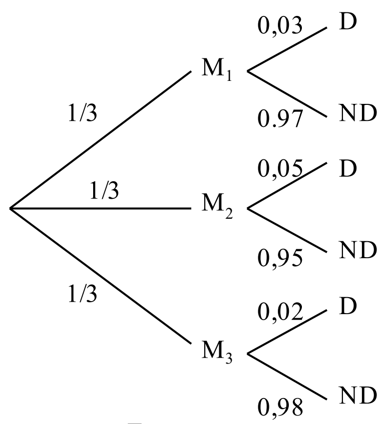
Los posibles puntos de inflexión son las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$. Como en este caso la ecuación no tiene solución $\Rightarrow$ la función no tiene puntos de inflexión.

3. *En una fábrica hay tres máquinas M_1, M_2 y M_3 que producen un mismo tornillo en proporciones iguales. Se sabe que la máquina M_1 produce un 3% de tornillos defectuosos, la M_2 un 5% y la M_3 un 2%. Se pide:*

a) La probabilidad de que un tornillo elegido al azar sea defectuoso. *(4 puntos)*
b) La probabilidad de que un tornillo elegido al azar no sea defectuoso. *(1 punto)*
c) Se elige un tornillo al azar y se observa que no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado por la máquina M_3?. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación:



a) Aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(D) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}03 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}05 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}02 = \frac{1}{3}\left(0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}02\right) = 0{,}033$$

b) $p(ND) = 1 - p(D) = 1 - 0{,}033 = 0{,}967$

c) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p(M_3 / ND) = \frac{p(M_3) \cdot p(ND / M_3)}{p(M_1) \cdot p(ND / M_1) + p(M_2) \cdot p(ND / M_2) + p(M_3) \cdot p(ND / M_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}98}{\frac{1}{3} \cdot 0{,}97 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}95 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}98} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}98}{\frac{1}{3}(0{,}97 + 0{,}95 + 0{,}98)} = \frac{0{,}98}{2{,}9} = 0{,}338$$

Junio 1995.

OPCIÓN B

1. *a) En un problema de programación lineal, qué diferencia hay entre solución factible y solución óptima..* *(1 punto)*
b) Sea S la región del plano definida por las cinco inecuaciones siguientes:

$$x - y \geq -2 \qquad x + 2y \leq 6 \qquad 2x + y \leq 6 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Se pide:

b_1) Representar gráficamente la región S y calcular sus vértices. *(4 puntos)*

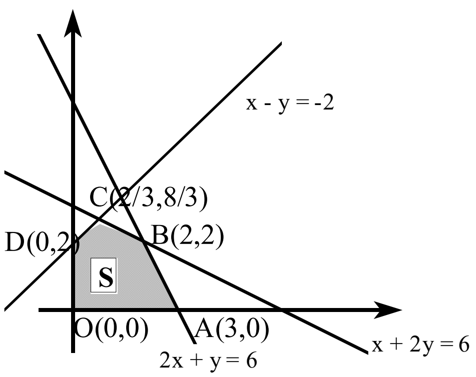
b_2) Considerar la función f(x,y) = x + y. Calcular los valores de (x,y) que hacen mínima y los que hacen máxima la función f(x,y) en la región S. Razonar la respuesta. *(2 puntos)*

b_3) Considerar la función g(x,y) = !2x ! 4y. Calcular los valores de (x,y) que hacen mínima y los que hacen máxima la función g(x,y) en la región S. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Solución factible es cualquiera que cumpla todas las restricciones y por tanto pertenezca a la región factible.
Solución óptima es la que, entre las factibles, maximice o minimice la función objetivo.

b_1)



Vértice O: O (0 , 0)

Vértice A: $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3,0)$

Vértice B: $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow B(2,2)$

Vértice C: $\begin{cases} x - y = -2 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$

Vértice D: $\begin{cases} x - y = -2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow D(0,2)$

b_2) La función objetivo alcanza su valor máximo y su valor mínimo en los vértices de la región factible. Sustituyamos las coordenadas de los vértices en la función f(x , y) = x + y para observar en cuál se maximiza y en cuál se minimiza:

$$f(0,0)=0 \ , \ f(3,0)=3 \ , \ f(2,2)=4 \ , \ f\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)=\frac{10}{3} \ , \ f(0,2)=2$$

luego la función objetivo se maximiza en $(2,2)$ y se minimiza en $(0,0)$.

b_3) Sustituyamos los vértices de la región factible en la función $g(x,y) = -2x - 4y$:

$$g(0,0)=0 \ , \ g(3,0)=-6 \ , \ g(2,2)=-12 \ , \ g\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)=-12 \ , \ g(0,2)=-8$$

luego la función alcanza su valor máximo en $(0,0)$ y su valor mínimo en cualquier punto del lado BC.

2. *a) El coste de la producción de x unidades diarias de un determinado producto es* $x^2 + 10x + 10$ *y el precio de venta de una unidad es (30!x). Calcular el número de unidades del producto que deben venderse diariamente para que el beneficio sea máximo y el beneficio máximo que se obtiene. Razonar la respuesta.* *(5 puntos)*
b) Hallar la región del plano limitada por las gráficas de las siguientes funciones: $y = x^2 + 1$ *e* $y = x + 3$ *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) La función beneficio es la diferencia entre los ingresos (por ventas) y los costes de producción:

$$B(x) = (30 - x)x - (x^2 + 10x + 10) = -2x^2 + 20x - 10$$

Veamos dónde alcanza la función B(x) su máximo: $B'(x) = -4x + 20 = 0 \Rightarrow x = 5$ (punto crítico). Veamos que se trata en efecto de un máximo: $B''(x) = -4 < 0 \Rightarrow$ máximo.

Por tanto el beneficio es máximo cuando se producen y se venden 5 unidades. El beneficio máximo obtenido será: $B(5) = 40$.

b) Definimos la función diferencia de las dos funciones dadas: $f(x) = (x^2 + 1) - (x + 3) = x^2 - x - 2$

Veamos los puntos de corte de esta función con el eje OX: $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = -1$ y 2

Calculamos la integral definida entre –1 y 2 de la función diferencia:

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{8}{3} - 2 - 4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{2}$$

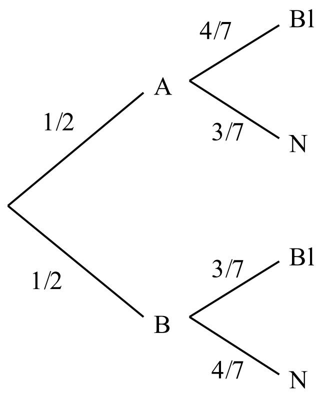
Por tanto: $S = \left| -\dfrac{9}{2} \right| = \dfrac{9}{2} u^2$

3. *Se tiene dos cajas A y B, con bolas blancas y negras. La caja A contiene 4 bolas blancas y 3 negras y la B contiene 3 blancas y 4 negras. Se selecciona una caja al azar y seguidamente se extrae una bola de la caja seleccionada. Se pide:*

a) La probabilidad de que la bola extraída sea blanca. *(5 puntos)*
b) Si se extrae una bola y resulta ser blanca, ¿cuál es la probabilidad de que dicha bola sea de la caja A? *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación:



a) Aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p(Bl) = p(A) \cdot p(Bl/A) + p(B) \cdot p(Bl/\mathrm{B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{7}{14} = 0{,}5$$

b) Aplicación del teorema de Bayes:

$$p(A/Bl) = \frac{p(A) \cdot p(Bl/A)}{p(A) \cdot p(Bl/A) + p(B) \cdot p(Bl/\mathrm{B})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}} = \frac{4}{7} = 0{,}57$$