Septiembre 1995.

OPCIÓN A.

1. *a) Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 5\end{pmatrix}$

Resolver, indicando los pasos seguidos, la ecuación matricial AB + CX = 2D. *(5 puntos)*

NOTA: *X es una matriz.*

b) Escribir un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que sea incompatible y comprobar la incompatibilidad. Interpretar geométricamente este sistema. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Despejamos X en la ecuación matricial dada:

$$AB+CX=2D \;\Rightarrow\; CX=2D-AB \;\Rightarrow\; C^{-1}CX=C^{-1}(2D-AB) \;\Rightarrow\; X=C^{-1}\cdot(2D-AB)$$

X Calculemos $C^{!1}$: $\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right) \overset{(1)}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right) \overset{(2)}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right) \overset{(3)}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$

luego $C^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$

Transformaciones que conservan el rango: (1) F_2-3F_1 (2) F_1+F_2 (3) $\frac{F_2}{-2}$

X Calculemos AB: $A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}$

X Calculemos ahora la matriz X: $X=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}2 & 0\\ -6 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & 0\\ -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-22 & 0\\ \frac{31}{2} & 0\end{pmatrix}$

□Otra forma de resolverlo sería considerar una matriz X de elementos desconocidos (tiene que ser 2H2) que pueden ser calculados a partir de la ecuación matricial dada:

$$AB+CX=2D \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -6 & 10\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}-7 & 0\\ -2 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 3a+4c & 3b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -6 & 10\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}-7+a+2c & b+2d\\ -2+3a+4c & 10+3b+4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -6 & 10\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases}a+2c=9\\ 3a+4c=-4\\ b+2d=0\\ 3b+4d=0\end{cases} \;\Rightarrow\; a=-22\;,\; b=0\;,\; c=\frac{31}{2}\;,\; d=0$$ y queda la misma matriz X que antes.

b) Por ejemplo: $\begin{cases}x+y=1\\ x+y=2\end{cases}$. En efecto el sistema es incompatible: $\begin{cases}x+y=1\\ x+y=2\end{cases} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases}x+y=1\\ 0y=1\end{cases} \;\Rightarrow$ incompatible

Se trata de dos rectas paralelas.

Transformaciones elementales: (1) E_2-E_1

2. *Las funciones de oferta, q = S(p), y demanda, q = D(p), que determinan la cantidad q de un producto en función de su precio p, son respectivamente:*

$$S(p) = p - 3 \quad ; \quad D(p) = \frac{4}{p}$$

Se pide:

a) Calcular el precio de equilibrio (cuando la oferta y la demanda se igualan), y para este precio la cantidad de producto demandada y ofertada. *(2 puntos)*

b) En el mismo sistema de ejes cartesianos, representar gráficamente S(p) y D(p) para p > 0, haciendo previamente un estudio del crecimiento, decrecimiento, convexidad y concavidad de cada una de las dos funciones. *(4 puntos)*

c) Calcular el área de la región limitada por las gráficas de S(p), D(p) y la recta p = 1. *(2 puntos)*

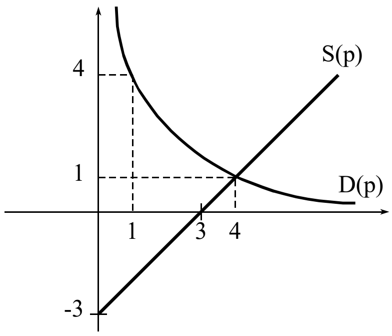
SOLUCIÓN.

a) $S(p) = D(p) \;\Rightarrow\; p - 3 = \frac{4}{p} \;\Rightarrow\; p^2 - 3p - 4 = 0 \;\Rightarrow\; p = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix} \;\Rightarrow\; p = 4$ (el precio no puede ser negativo. Las cantidades de producto demandada y ofertada serán: $S(4) = 1$, $D(p) = 1$.

b) Hagamos un estudio previo del crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad:

$S'(p) = 1 \;\Rightarrow\; S''(p) = 0 \;\Rightarrow$ la función de oferta es creciente y no es ni cóncava ni convexa (es una recta)

$D'(p) = -\frac{4}{p^2} < 0 \;\; \forall x \;\Rightarrow\; D''(p) = \frac{8}{p^3} > 0 \;\; \forall p > 0 \;\Rightarrow$ la función de demanda es decreciente y cóncava (es una hipérbola). La gráfica es:



c) A la vista de la gráfica: $S = \int_1^4 D(p)\,dp - \int_1^4 S(p)\,dp \;\Rightarrow$

$$S = \int_1^4 \left(\frac{4}{p}\right) dx - \int_1^4 (p-3)\,dx = [4 \cdot \ln p]_1^4 - \left[\frac{p^2}{2} - 3p\right]_1^4 =$$

$$= (4 \cdot \ln 4 - \ln 1) - \left(8 - 12 - \frac{1}{2} + 3\right) = 4 \cdot \ln 4 + \frac{3}{2} \cong 7 \; u^2$$

3. *Una moneda está trucada de manera que la probabilidad de salir cara es doble que la de salir cruz. Se lanza la moneda y si sale cara se elige al azar un número entre el 1 y el 5; si sale cruz se elige al azar un número entre el 1 y el 3. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:*

a) Salga cara en la moneda. *(1 punto)*

b) Salga cruz en la moneda. *(1 punto)*

c) Resulte elegido el número 5. *(3 puntos)*

d) Resulte elegido un número par. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $p\,(C) = \frac{2}{3}$

b) $p\,(X) = \frac{1}{3}$

c) $p\,(5) = p\,(C) \cdot p\,(5 \;/\; C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15} = 0{,}133$

d) $p\,(par) = p\,(C) \cdot p\,(par \;/\; C) + p\,(X) \cdot p\,(par \;/\; X) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{15} + \frac{1}{9} = \frac{17}{45} = 0{,}378$

Septiembre 1995.

OPCIÓN B.

1. *Una compañía aérea tiene 2 aviones A y B para cubrir un determinado trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B, pero no puede pasar de 120 vuelos y el avión B no puede hacer más de 180. Entre los dos aviones han de realizar al menos 60 vuelos y como mucho 200. Se pide:*

a) Si en cada vuelo del avión A la empresa gana 300.000 pesetas y en cada vuelo del avión B 200.000, ¿cuántos vuelos debe realizar cada avión para maximizar los beneficios de la empresa? (Explicar los pasos seguidos para resolver el problema) *(6 puntos)*
b) ¿Se puede quitar alguna restricción sin que la solución varíe?. Razonar la respuesta. *(1 punto)*
c) Si en cada vuelo el avión A consume el doble de litros de gasolina que el avión B, ¿cuántos vuelos ha de hacer cada avión para que el consumo de gasolina sea mínimo?. Razonar la respuesta. *(3 puntos)*

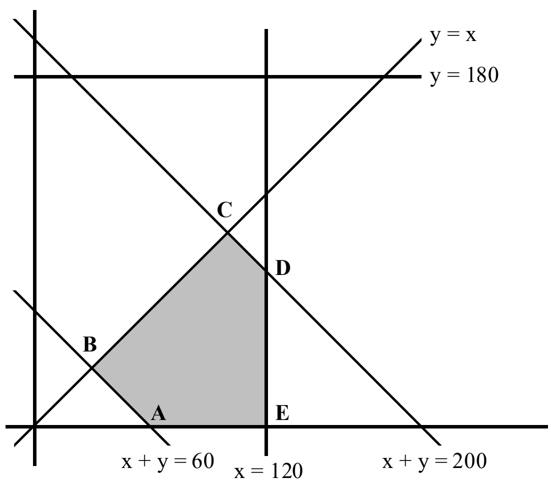
SOLUCIÓN.

Se trata de un problema de Programación Lineal. Sea x el número de vuelos del avión A e y el de vuelos del avión B. Escribamos la función objetivo y sus restricciones:

X Función objetivo: $f(x, y) = 300000x + 200000y$ (maximizar)

X Restricciones: $\begin{cases} 0 \le x \le 120 \\ 0 \le y \le 180 \\ y \le x \\ 60 \le x + y \le 200 \end{cases}$

Representemos gráficamente el conjunto de restricciones (sistema de inecuaciones de dos incógnitas):



X La recta de ecuación x = 0 es el eje de ordenadas y la solución de la inecuación $0 \le x$ es el semiplano de la derecha. La recta de ecuación x = 120 es paralela el eje de ordenadas y la solu-ción de $x \le 120$ es el semiplano de la izquierda.
X La recta de ecuación y = 0 es el eje de abscisas y la solución de la inecuación $0 \le y$ es el semiplano superior. La recta de ecuación y = 180 es paralela al eje de abscisas y la solución de $y \le 180$ es el semiplano inferior.
X La recta de ecuación $x + y = 60$ pasa por los puntos $(60, 0)$ y $(0, 60)$ (por ejemplo). La solución de $x + y \ge 60$ es el semi-plano al que no pertenece el origen de coordenadas.
X La recta de ecuación $x + y = 200$ pasa por los puntos $(200, 0)$ y $(0, 200)$ (por ejemplo). La solución de $x + y \le 200$ es el semiplano al que pertenece el origen de coordenadas.

La solución común de todas las inecuaciones es la región factible(en gris). La función objetivo se maximiza en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos sus coordenadas y el valor de la función en cada uno de ellos:

Vértice A: $\begin{cases} y = 0 \\ x + y = 60 \end{cases} \Rightarrow A(60, 0) \Rightarrow f(60, 0) = 300000 \cdot 60 = 18000000$

Vértice B: $\begin{cases} y = x \\ x + y = 60 \end{cases} \Rightarrow B(30, 30) \Rightarrow f(30, 30) = 300000 \cdot 30 + 200000 \cdot 30 = 15000000$

Vértice C: $\begin{cases} y = x \\ x + y = 200 \end{cases} \Rightarrow C(100, 100) \Rightarrow f(100, 100) = 300000 \cdot 100 + 200000 \cdot 100 = 50000000$

Vértice D: $\begin{cases} x = 120 \\ x + y = 200 \end{cases} \Rightarrow D(120\,,80) \Rightarrow f(120\,,80) = 300000 \cdot 120 + 200000 \cdot 80 = 52000000$

Vértice E: $\begin{cases} x = 120 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(120\,,0) \Rightarrow f(120\,,0) = 300000 \cdot 120 = 36000000$

Por tanto, el máximo beneficio lo obtiene con 120 vuelos del avión A y 80 vuelos del avión B.

b) Sí. La restricción $y \le 180$ se podría eliminar pues no contribuye a formar la región factible. También sobra $x \ge 0$.

c) La función objetivo referida al consumo será: $F(x\,,y) = 2x + y$. Calculando el valor de la función en cada uno de los vértices de la región factible, se llega a la conclusión de que el menor consumo se tiene en el vértice B, es decir para 30 vuelos de cada uno de los tipos de avión.

2. *Considerar la función* $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x^2}$. *Se pide:*

a) Dar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, de concavidad y convexidad de la función. Razonar si existen máximos, mínimos y puntos de inflexión. *(4 puntos)*

b) Razonar si existen asíntotas y en caso de que existan, calcularlas. *(2 puntos)*

c) Representar la gráfica de la función. *(1 punto)*

d) Calcular $\int_1^4 \dfrac{1+x^2}{x^2}\,dx$. *Explicar qué representa este valor.* *(3 puntos)*

SOLUCIÓN.

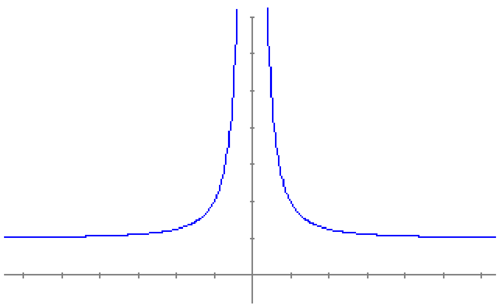
a) X Tenemos: $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} \Rightarrow$ $\underset{}{f'(x) > 0} \;\Big|_{0}\; f'(x) < 0$ luego la función es creciente en $(-\infty\,,0)$ y decreciente en $(0\,,\infty)$. No tiene puntos de máximo ni de mínimo porque $f'(x) \ne 0 \quad \forall x$

X $f''(x) = \dfrac{6}{x^4} > 0 \;\; \forall x \Rightarrow$ la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión porque $f''(x) \ne 0 \quad \forall x$

b) X x = 0 es una asíntota vertical pues $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1+x^2}{x^2} = \infty$

X y = 1 es una asíntota horizontal pues $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1+x^2}{x^2} = 1$

c)



d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+x^2}{x^2}\,dx = \int_1^4 \left(x^{-2}+1\right)dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1} + x\right]_1^4 =$

$\displaystyle = \left[-\frac{1}{x} + x\right]_1^4 = \left(-\frac{1}{4} + 4\right) - (-1+1) = \frac{15}{4}$

Representa el área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas x = 1 y x = 4.

3. *Se tiene dos urnas con bolas blancas y verdes. Una de las urnas contiene 8 bolas blancas y 4 verdes y la otra contiene 6 blancas y 10 verdes. Se extrae una bola de cada urna. Calcula:*

a) La probabilidad de que las dos bolas sean del mismo color. *(5 puntos)*

b) La probabilidad de que una bola sea verde y la otra blanca. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) $p\left[(B_1 \text{ I } B_2) \text{ Y } (V_1 \text{ I } V_2)\right] = p(B_1 \text{ I } B_2) + p(V_1 \text{ I } V_2) = \dfrac{8}{12} \cdot \dfrac{6}{16} + \dfrac{4}{12} \cdot \dfrac{10}{16} = \dfrac{88}{192} = 0{,}458$

b) $p\left[(B_1 \text{ I } V_2) \text{ Y } (V_1 \text{ I } B_2)\right] = p(B_1 \text{ I } V_2) + p(V_1 \text{ I } B_2) = \dfrac{8}{12} \cdot \dfrac{10}{16} + \dfrac{4}{12} \cdot \dfrac{6}{16} = \dfrac{104}{192} = 0{,}542$