Junio 1994.

OPCIÓN A.

1. *Un aficionado a la Bolsa invirtió 2.000.000 de pesetas en acciones de tres empresas A, B y C. Al cabo de un año la empresa A pagó el 6% del dinero invertido, la B el 8% y la C el 10%. Como consecuencia de ello, el aficionado a la Bolsa cobró un total de 162.400 pesetas. Además en la empresa C invirtió el doble que en la A. Se pide:*

a) Calcular cuánto invirtió en cada empresa. (Razonar la respuesta) *(7 puntos)*
b) Prescindiendo del último dato, es decir de que el aficionado invirtió en la empresa C el doble que en la A, ¿cuál sería la respuesta? *(3 puntos)*

***Nota:** Los sistemas de ecuaciones lineales se deben resolver por el método de Gauss.*

SOLUCIÓN.

a) Planteamos un sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} A+B+C=2000000 \\ 0{,}06A+0{,}08B+0{,}10C=162400 \\ C=2A \end{cases}$ que resolvemos por el método de Gauss: $\begin{cases} A+B+C=2000000 \\ 3A+4B+5C=8120000 \\ 2A-C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=2000000 \\ B+2C=2120000 \\ -2B-3C=-4000000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=2000000 \\ B+2C=2120000 \\ \mathrm{C}=240000 \end{cases} \Rightarrow$

A = 120 000 ptas , B = 1 640 000 ptas , C = 240 000 ptas

b) Si eliminamos la última condición, el sistema tiene dos ecuaciones (las dos primeras) y tres incógnitas. Se trata de un sistema compatible indeterminado y sus soluciones habrá que expresarlas en función de una de las cantidades invertidas:

$$A = C - 120000 \quad , \quad \mathrm{B} = 2120000 - 2C$$

2. *Sea f: /// una función cuya primera derivada es f´(x) = 2x !x²*. *Se pide:*

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, de concavidad y convexidad de la función f(x). (4 puntos)
b) Razonar si existen máximos, mínimos y puntos de inflexión. En caso de que existan, calcularlos. (2 puntos)
c) Representar la gráfica de una función cuya primera derivada sea 2x !x². (2 puntos)
d) La gráfica representada en el apartado anterior ¿es la única que se podía pintar? ¿por qué?. (2 puntos)

SOLUCIÓN.

a) ∃ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada:

$$\mathrm{f'(x)} = 2\mathrm{x} - \mathrm{x}^2 = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{x}\,(2-\mathrm{x}) = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{x}=0\ ,\ \mathrm{x}=2$$

f' < 0	0	f' > 0	2	f' < 0

Luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)\,\mathrm{Y}\,(2, \infty)$ y creciente en $(0, 2)$.

∃ Los intervalos de concavidad y convexidad dependen del signo de la segunda derivada:

$$\mathrm{f''(x)} = 2 - 2\mathrm{x} = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{x} = 1$$

f´´ > 0	1	f´´ < 0

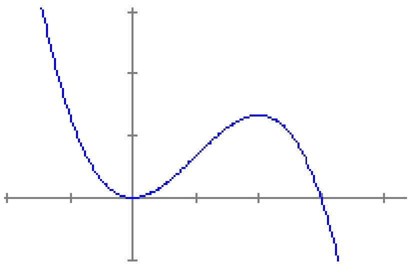
Luego la función es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, \infty)$.

b) ∃ Los posibles puntos de máximo o mínimo anulan a la primera derivada: x = 0 y x = 2. Para comprobar si se trata de máximos o de mínimos, sustituimos dichos valores en la segunda derivada:

$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow$ La función tiene un mínimo en $x = 0$. $f''(2) = -2 < 0 \Rightarrow$ La función tiene un mínimo en $x = 2$.

∃ Los puntos de inflexión anulan la segunda derivada ($x = 1$) y no anulan a la tercera derivada. Como $f'''(1) = -2 \neq 0 \Rightarrow$ La función tiene un punto de inflexión en $x = 1$.

c) Con los datos de que disponemos: función polinómica (continua), mínimo en $x = 0$, máximo en $x = 2$, punto de inflexión en $x = 1$, una posible gráfica es:



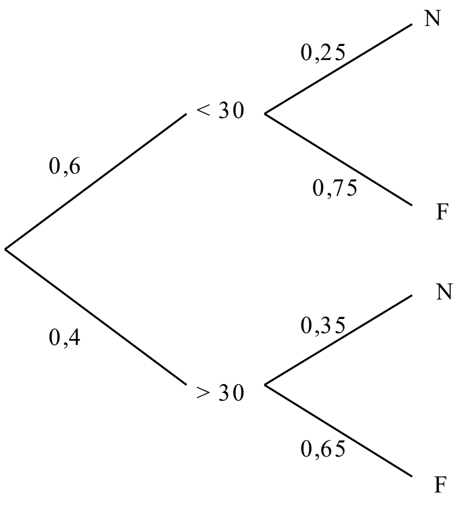
d) No, si se le suma (o resta) una constante k a la ecuación, la gráfica se desplazará k unidades hacia arriba (hacia abajo).

3. *El año pasado el 60% de los veraneantes de una cierta localidad eran menores de 30 años y el resto mayores. Un 25% de los menores de 30 años y un 35% de los mayores eran nativos de esa localidad. Se pide:*

a) La probabilidad de que un veraneante elegido al azar sea nativo de esa localidad. *(5 puntos)*
b) Se elige un veraneante al azar y se observa que es nativo de la localidad, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 30 años?. *(5 puntos)*

SOLUCIÓN.

Construyamos el diagrama en árbol de la situación:



a) Es una aplicación del teorema de la probabilidad total:

$$p\,(N) = 0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}35 = 0{,}29$$

b) Es una aplicación del teorema de Bayes:

$$p\left(> 30 / N\right) = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}35}{0{,}6 \cdot 0{,}25 + 0{,}4 \cdot 0{,}35} = 0{,}48$$

Junio 1994.

OPCIÓN B

1. *Los 400 alumnos de un colegio van a ir de excursión. Para ello se contrata el viaje a una empresa que dispone de 8 autobuses de 40 plazas y 10 con 50 plazas, pero sólo de 9 conductores para ese día. Dada la diferente capacidad y calidad, el alquiler de cada autobús de los grandes cuesta 8.000 pesetas y el de cada uno de los pequeños 6.000 pesetas. Se quiere saber cuántos autobuses de cada clase se tiene que alquilar para que el coste del viaje sea mínimo. Para ello se pide:*

a) Plantear el problema que se debe resolver (función objetivo y restricciones) *(5 puntos)*
b) Representar la región factible. *(2,5 puntos)*
c) Resolver el problema, explicando los pasos seguidos hasta obtener la solución. *(2,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Organicemos en una tabla los datos y condiciones del problema:

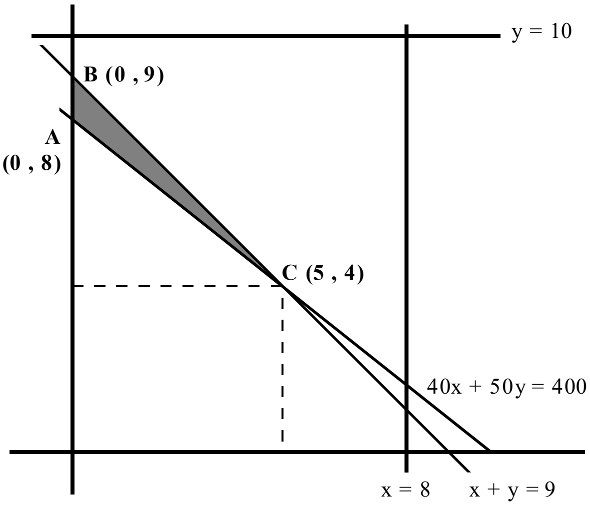
Tipo autobuses	**Número**	**Nº viajeros**	**Nº conductores**	**Precio**
40 plazas	x	40x	x	6000x
50 plazas	y	50y	y	8000y
	$0 \le x \le 8$ $0 \le y \le 10$	$40x + 50y \ge 400$	$x + y \le 9$	F (x , y)

∃ La función objetivo (que debe ser mínima) es: $F(x, y) = 6000x + 8000y$

∃ El conjunto de restricciones a que debe estar sometida la solución es: $\begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 8 \\ y \ge 0 \\ y \le 10 \\ x + y \le 9 \\ 40x + 50y \ge 400 \end{cases}$

b) La región factible es el conjunto de puntos del plano solución del sistema de restricciones.

Dibujamos las rectas x = 0, x = 8, y = 0, y = 10, x + y = 9 y 40x + 50y = 400 y seleccionamos el semiplano solución de cada una de las inecuaciones. La intersección de todos los semiplanos es la región factible: el triángulo de vértices A, B y C.



Calculemos sus vértices:

Vértice A: $\begin{cases} x = 0 \\ 40x + 50y = 400 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \;,\; y = 8$

Vértice B: $\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 9 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \;,\; y = 9$

Vértice C: $\begin{cases} x + y = 9 \\ 40x + 50y = 400 \end{cases} \Rightarrow x = 5 \;,\; y = 4$

c) La solución del problema está en alguno de los vértices de la región factible. Calculemos el valor de la función objetivo en cada uno de ellos:

$$F(0\,,8)=64000 \quad , \quad F(0\,,9)=72000 \quad , \quad F(5\,,4)=62000$$

Luego la solución más barata se obtiene utilizando 5 autobuses de 40 plazas y 4 autobuses de 50 plazas.

2. *Dada la función* $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$ *, se pide:*

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Razonar si existen máximos y mínimos y en caso de que existan, calcularlos. *(6 puntos)*

b) Estudiar la existencia de asíntotas. En caso de que existan, calcularlas. *(4 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) ∃ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento dependen del signo de la primera derivada: $f'(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$

$f'(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=-2\ ,\ x=2:$

$f'>0$		$f'<0$		$f'>0$
	-2		2	

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty\,,-2)\cup(2\,,\infty)$ y decreciente en $(-2\,,2)$.

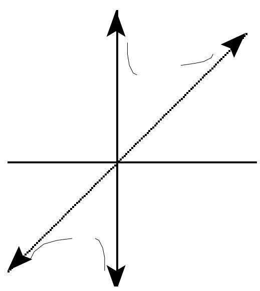
∃ La función puede tener máximos o mínimos en $x=-2$ y en $x=2$ pues son los dos valores que anulan a $f'(x)$.

Para comprobar si se tratan de máximos o de mínimos sustituimos los valores en $f''(x)=\dfrac{8}{x^3}$:

$f''(-2)<0 \Rightarrow$ en $x=-2$ la función tiene un máximo relativo.

$f''(2)>0 \Rightarrow$ en $x=2$ la función tiene un mínimo relativo.

b) ∃ Asíntotas verticales: $x=0$ es una asíntota vertical pues $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$.



Posición de la curva respecto a la asíntota: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+4}{x}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+4}{x}=+\infty$

∃ Asíntotas horizontales u oblicuas: $\dfrac{x^2+4}{x}=x+\dfrac{4}{x} \Rightarrow$ $y=x$ es una asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4}{x}=0^-$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4}{x}=0^+$

3. *Un barco tiene tres sistemas de alarma independientes, cada uno de los cuales tiene una probabilidad de 0,9 de funcionar en caso necesario. Si se produce un robo, calcular razonadamente:*

a) La probabilidad de que las tres alarmas se activen. *(3 puntos)*

b) La probabilidad de que ninguna alarma se active. *(3,5 puntos)*

c) La probabilidad de que al menos una alarma se active. *(3,5 puntos)*

SOLUCIÓN.

a) Sean los sucesos A_1 = "la primera alarma se activa", A_2 = "la segunda alarma se activa" y A_3 = "la tercera alarma se activa". Como son sucesos independientes:

$$p(A_1\cap A_2\cap A_3)=p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot p(A_3)=0{,}9\cdot 0{,}9\cdot 0{,}9=0{,}729$$

b) $p(\overline{A_1}\cap \overline{A_2}\cap \overline{A_3})=p(\overline{A_1})\cdot p(\overline{A_2})\cdot p(\overline{A_3})=0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}1=0{,}001$

c) El suceso "al menos una alarma se activa" es el suceso contrario a "ninguna alarma se activa": $p = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$