EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2022
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a.- (*3 puntos*) Calcular el valor de m para que la ecuación matricial $X\cdot A=B$ tenga solución única.

b.- (4 *puntos*) Para $m = 1$, resuelva la ecuación matricial anterior.

c.- (3 *puntos*) Resuelve el sistema de ecuaciones: $B\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.- (*10 puntos*) Una empresa de transportes valora la apertura de sucursales rurales y/o urbanas. Las sucursales rurales emplean a tres personas, requieren de una inversión de 100.000 euros para su apertura y generan unos ingresos de 15.000 euros al mes. Las sucursales urbanas emplean a 6 personas, requieren de 150.000 euros de inversión y generan un ingreso de 18.000 euros al mes. La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales, han decidido limitar el número de nuevas sucursales a 25 y se han comprometido a crear como mínimo 60 empleos.

a.- (*3 puntos*) Plantee un problema de programación lineal que permita calcular el número de sucursales de cada tipo que deben abrirse para maximizar el ingreso mensual.

b.- (*5 puntos*) Resuelva el problema anterior y calcule el ingreso mensual máximo que se obtendría.

c.- (*2 puntos*) En la solución óptima, ¿cuántos empleos generará?, ¿se gasta todo el dinero disponible?

3.- (*10 puntos*) En una empresa el coste total, en euros, de producir q unidades viene dado por:

$$C(q)=300q-10q^2+\frac{q^3}{3}$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a.- (*3 puntos*) Calcule la función coste marginal $\left(C_m(q)=C'(q)\right)$ ¿A partir de qué unidad el coste marginal aumenta al aumentar la producción?

b.- (*3 puntos*) Determine el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio $CM(q)=\dfrac{C(q)}{q}$.

c.- (*4 puntos*) Si el precio de venta unitario, en euros, del artículo en el mercado es $P(q)=240-2q$ Determine para qué nivel de producción se maximiza el beneficio (ingresos menos costes).

4.- (*10 puntos*) Siendo a, b parámetros reales, se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{3} & si \quad x\le 0 \\ \sqrt{ax+b} & si \quad 0<x\le 3 \\ \dfrac{7}{2}-\dfrac{x}{6} & si \quad x>3 \end{cases}$$

a.- (*3 puntos*) Determine el valor de los parámetros para que *f(x)* sea continua.

b.- (*4 puntos*) Para dichos valores, analice si *f(x)* es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$.

c.- (*3 puntos*) Calcule el valor máximo y mínimo de *f(x)* si $x \in [6,9]$ y las coordenadas de los puntos donde se alcanzan dichos valores.

5.- (*10 puntos*) Responde a las dos cuestiones siguientes:

a.- (*6 puntos*) Se ha realizado una encuesta sobre la compra de ropa por internet, en concreto sobre compra de ropa nueva y compra de ropa de segunda mano. De los entrevistados, el 90% dice que compra ropa (usada o nueva), el 15% compra ropa de ambos tipos y el 60% no compra ropa de segunda mano. Para un encuestado elegido al azar:

a.1 (*3 puntos*) Calcule la probabilidad de que compre ropa nueva y no de segunda mano.

a.2 (*3 puntos*) Si dice que no compra ropa de segunda mano ¿cuál es la probabilidad de que tampoco compre ropa nueva?

b.- (*4 puntos*) En una encuesta realizada a 64 jóvenes 8 se mostraron contrarios a llevar mascarillas en el interior de recintos de ocio. Calcule un intervalo de confianza al 97% para determinar la proporción de jóvenes que son contrarios al uso de mascarilla en interiores de recintos de ocio. Por otro lado, el alcalde de la ciudad considera que si existe un 25% de jóvenes adversos al uso de mascarilla se requiere aplicar algún tipo de medida de concienciación. A la vista del intervalo calculado ¿se debería implantar alguna medida de concienciación?

6.- (*10 puntos*) Por una prueba de acceso a la Universidad realizada a los estudiantes de segundo de Bachillerato, se sabe que las calificaciones obtenidas se distribuyen según una distribución normal.

a.- (*4 puntos*) Si la media de la prueba selectiva es de 65 puntos y la desviación típica 8. Calcule la probabilidad de que la nota media de 25 estudiantes elegidos al azar sea mayor a 63 puntos.

b.- (*3 puntos*) Calcule un intervalo de confianza para la nota media de ingreso en DADE, con un nivel de confianza del 92%, sabiendo que ingresan 100 estudiantes, que la nota media de acceso es de 80 puntos y que la desviación típica es 8,8 puntos.

c.- (*3 puntos*) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo del intervalo de confianza calculado en el apartado anterior se reduzca a la mitad (con los datos del apartado b.-).

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

a.- (*3 puntos*) Calcular el valor de *m* para que la ecuación matricial $X\cdot A=B$ tenga solución única.

b.- (4 *puntos*) Para *m = 1*, resuelva la ecuación matricial anterior.

c.- (3 *puntos*) Resuelve el sistema de ecuaciones: $B\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a.- La ecuación $X\cdot A=B$ tiene solución única cuando la matriz A tenga inversa y la solución sería $X=B\cdot A^{-1}$.

Averiguamos cuando tiene inversa la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-4m+8-3m=-7m+8$$

$$|A|=0\Rightarrow -7m+8=0\Rightarrow \boxed{m=\frac{8}{7}}$$

Si $m=\frac{8}{7}$ el determinante de A es nulo y no tiene inversa. La ecuación no tendrá solución.

Si $m\neq\frac{8}{7}$ el determinante de A es no nulo y la matriz tiene inversa. La ecuación matricial tendrá solución única.

b.- Para *m = 1* la matriz A tiene inversa y la ecuación matricial tiene como solución $X=B\cdot A^{-1}$.

Calculamos la inversa de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-4+8-3=1\neq 0$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lo aplicamos a la solución de la ecuación matricial.

$$X = B\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-8 & 2-1 & -3+2 \\ -7-8 & -1-1 & 2+2 \\ -7-12 & -1-2 & 2+3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -15 & -2 & 4 \\ -19 & -3 & 5 \end{pmatrix}}$$

c.- Comprobamos si B tiene inversa.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1-1=0$$

No tiene inversa, por lo que intentamos resolverlo sin el uso del cálculo matricial.

$$B\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+z=0 \\ x+z=0 \\ \boxed{x=y} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+z=0 \\ y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=-y}$$

$$Soluciones: \left.\begin{array}{l} x=y \\ z=-y \end{array}\right\}$$

2.- (*10 puntos*) Una empresa de transportes valora la apertura de sucursales rurales y/o urbanas. Las sucursales rurales emplean a tres personas, requieren de una inversión de 100.000 euros para su apertura y generan unos ingresos de 15.000 euros al mes. Las sucursales urbanas emplean a 6 personas, requieren de 150.000 euros de inversión y generan un ingreso de 18.000 euros al mes. La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales, han decidido limitar el número de nuevas sucursales a 25 y se han comprometido a crear como mínimo 60 empleos.

a.- (*3 puntos*) Plantee un problema de programación lineal que permita calcular el número de sucursales de cada tipo que deben abrirse para maximizar el ingreso mensual.

b.- (*5 puntos*) Resuelva el problema anterior y calcule el ingreso mensual máximo que se obtendría.

c.- (*2 puntos*) En la solución óptima, ¿cuántos empleos generará?, ¿se gasta todo el dinero disponible?

a) Llamamos x = número de sucursales rurales, y = número de sucursales urbanas.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Nº de empleados	Inversión	Ingresos (en miles de euros)
Nº sucursales rurales (x)	***3x***	***100000x***	***15x***
Nº sucursales urbanas (y)	***6y***	***150000y***	***18y***
TOTALES	$3x+6y$	$100000x+150000y$	$15x+18y$

Queremos maximizar los ingresos: $I(x,y)=15x+18y$

Las restricciones son:

"*La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales*" → $100000x+150000y\leq 3000000$

"*Han decidido limitar el número de nuevas sucursales a 25*" → $x+y\leq 25$

"Se han comprometido a crear como mínimo 60 empleos" → $3x+6y\geq 60$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}100000x+150000y\leq 3000000\\ x+y\leq 25\\ 3x+6y\geq 60\\ x\geq 0;\ y\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}10x+15y\leq 300\\ x+y\leq 25\\ x+2y\geq 20\\ x\geq 0;\ y\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x+3y\leq 60\\ x+y\leq 25\\ x+2y\geq 20\\ x\geq 0;\ y\geq 0\end{array}\right\}$$

b) Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$2x+3y=60$

x	$y=\frac{60-2x}{3}$
0	20
30	0

$x+y=25$

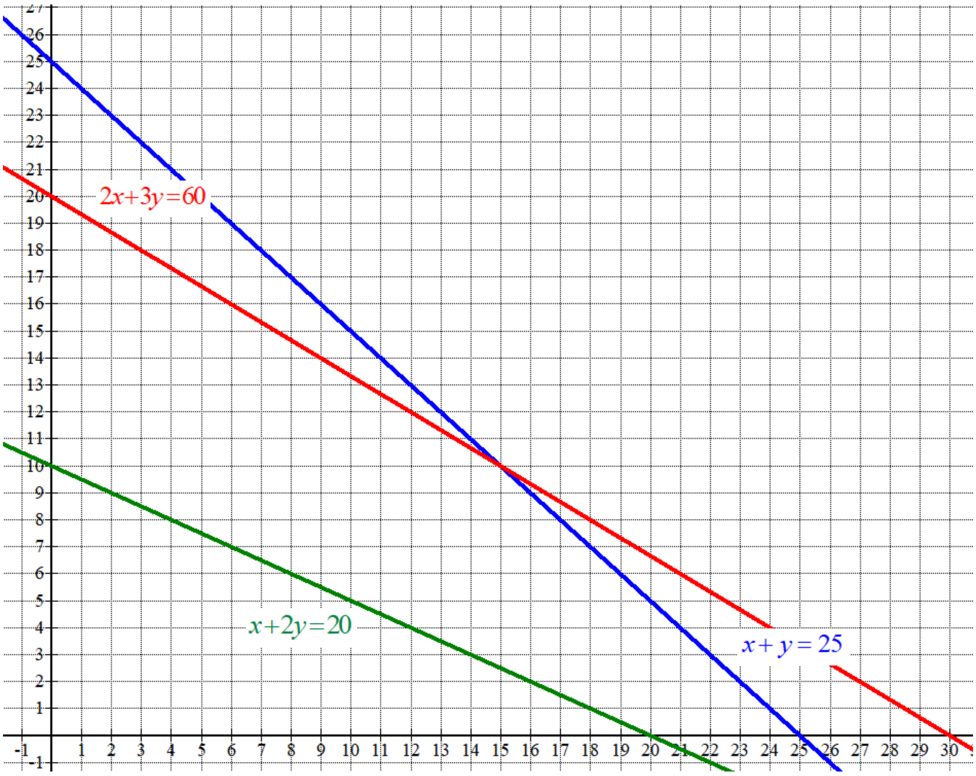
x	$y=25-x$
0	25
25	0

$x+2y=20$

x	$y=\frac{20-x}{2}$
0	10
20	0

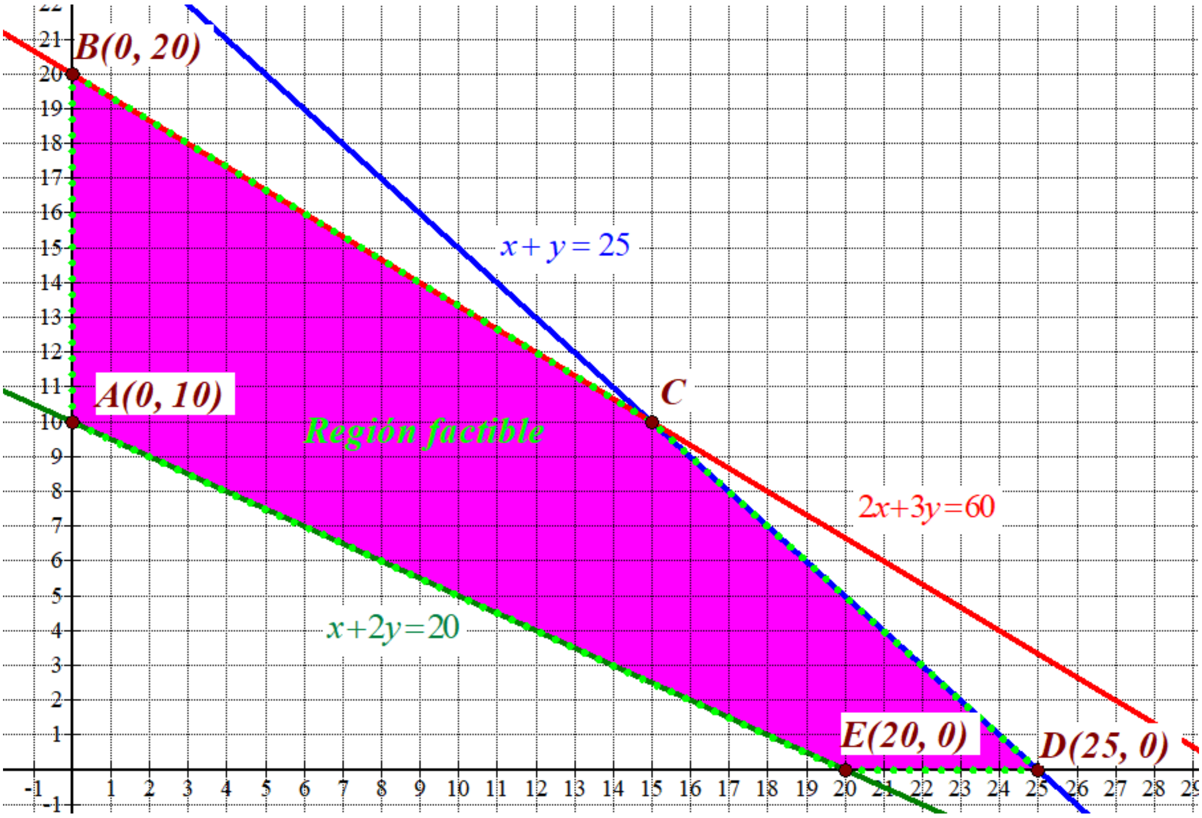
$x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+3y\leq 60 \\ x+y\leq 25 \\ x+2y\geq 20 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja y azul y por encima de la recta verde.

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del punto C resolviendo el sistema de ecuaciones formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=25 \\ 2x+3y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=25-y \\ 2x+3y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(25-y)+3y=60 \Rightarrow 50-2y+3y=60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=10 \Rightarrow x=25-10=15 \Rightarrow C(15,10)$$

Valoramos la función ingresos $I(x,y)=15x+18y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

A(10, 0) → $I(10,0)=150$

B(0, 20) → $I(0,20)=0+360=360$

C(15, 10) → $I(15,10)=225+180=405$ ¡Máximo!

D(25, 0) → $I(25,0)=375+0=375$

E(20, 0) → $I(20,0)=300+0=300$

El valor máximo es 405 y se obtiene en C(15, 10).
Abriendo 15 sucursales rurales y 10 urbanas nos ajustamos a las restricciones y obtenemos un máximo beneficio por valor de 405000 €.

c) En la solución óptima se abren 15 sucursales rurales y 10 urbanas generando 15 · 3 + 10 · 6 = 105 empleos. Y se invierten 15 · 100.000 + 10 · 150.000 = 3.000.000 €, por lo que se invierte todo el dinero disponible.

3.- (*10 puntos*) En una empresa el coste total, en euros, de producir q unidades viene dado por:

$$C(q) = 300q - 10q^2 + \frac{q^3}{3}$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a.- (*3 puntos*) Calcule la función coste marginal $\left(C_m(q) = C'(q)\right)$ ¿A partir de qué unidad el coste marginal aumenta al aumentar la producción?

b.- (*3 puntos*) Determine el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio $CM(q) = \frac{C(q)}{q}$.

c.- (*4 puntos*) Si el precio de venta unitario, en euros, del artículo en el mercado es $P(q) = 240 - 2q$ Determine para qué nivel de producción se maximiza el beneficio (ingresos menos costes).

a.- $C_m(q) = C'(q) = 300 - 20q + q^2$

Derivamos el coste marginal y vemos cuando la derivada es positiva.

$$C_m'(q) = -20 + 2q$$

$$C_m'(q) = 0 \Rightarrow -20 + 2q = 0 \Rightarrow q = \frac{20}{2} = 10$$

El crecimiento del coste marginal es nulo cuando se producen 10 unidades. Comprobamos el signo de la derivada antes y después de *q = 10.*

De 0 a 10 unidades tomamos *q =5* y tenemos que $C_m'(5) = -20 + 2(5) = -10 < 0$. Por lo que el coste marginal decrece cuando aumenta la producción.

De 10 en adelante tomamos *q = 15* y tenemos que $C_m'(15) = -20 + 2(15) = 10 > 0$. Por lo que el coste marginal crece cuando aumenta la producción en el intervalo (15, +∞).

El coste marginal aumenta a partir de la producción de 10 unidades.

b.- Obtenemos la expresión del coste medio.

$$CM(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{300q - 10q^2 + \frac{q^3}{3}}{q} = 300 - 10q + \frac{q^2}{3}$$

Derivamos e igualamos a cero para obtener el punto crítico del coste medio.

$$CM'(q) = -10 + 2\frac{q}{3}$$

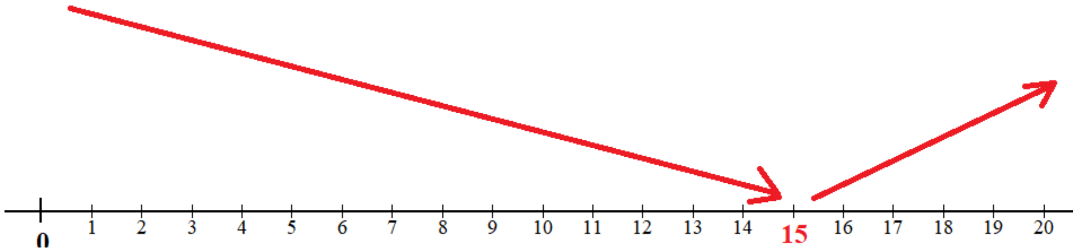
$$CM'(q) = 0 \Rightarrow -10 + 2\frac{q}{3} = 0 \Rightarrow -30 + 2q = 0 \Rightarrow q = \frac{30}{2} = 15$$

Comprobamos la evolución del coste medio estudiando el signo de la derivada antes de *q = 15* y después de dicho valor.

En (0, 15) tomamos *q = 10* y tenemos que $CM'(10) = -10 + 2\frac{10}{3} = -\frac{10}{3} < 0$. El coste medio decrece en (0, 15).

En (15, +∞) tomamos *q = 20* y tenemos que $CM'(10) = -10 + 2\frac{20}{3} = \frac{10}{3} > 0$. El coste medio crece en (0, 15).

La función sigue el esquema siguiente:



El coste medio se minimiza en $q = 15$. Con la producción de 15 unidades.

c.- Los ingresos son el número de unidades (q) multiplicado por el precio de una unidad ($P(q)$).

$$I(q) = q \cdot P(q) - C(q) = q(240 - 2q) = 240q - 2q^2$$

Obtenemos la expresión de la función Beneficios.

$$B(q) = I(q) - C(q) = 240q - 2q^2 - \left(300q - 10q^2 + \frac{q^3}{3}\right)$$

$$B(q) = 240q - 2q^2 - 300q + 10q^2 - \frac{q^3}{3} = -60q + 8q^2 - \frac{q^3}{3}$$

Derivamos e igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función beneficios.

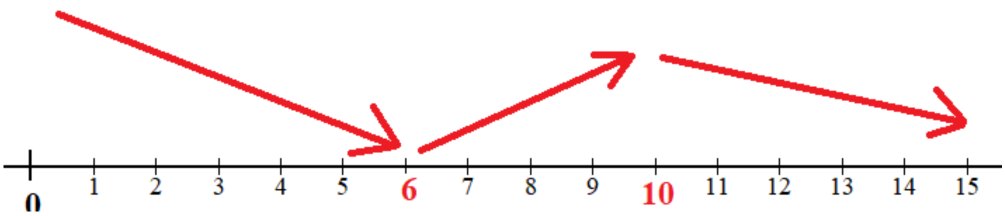
$$B(q) = -60q + 8q^2 - \frac{q^3}{3} \Rightarrow B'(q) = -60 + 16q - q^2$$

$$B'(q) = 0 \Rightarrow 60 - 16q + q^2 = 0 \Rightarrow q = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(60)}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{16+4}{2} = \boxed{10 = q} \\ \frac{16-4}{2} = \boxed{6 = q} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

En (0, 6) tomamos $q = 1$ y tenemos que $B'(1) = -60 + 16 - 1^2 = -45 < 0$. El beneficio decrece en (0, 6).
En (6, 10) tomamos $q = 8$ y tenemos que $B'(8) = -60 + 16 \cdot 8 - 8^2 = 4 > 0$. El beneficio crece en (6, 10).
En (10, +∞) tomamos $q = 15$ y tenemos que $B'(15) = -60 + 16 \cdot 15 - 15^2 = -45 < 0$. El beneficio decrece en (10, +∞).

La función sigue el esquema siguiente:



El beneficio es máximo en $q = 10$, es decir, con la producción de 10 unidades.

4.- (*10 puntos*) Siendo *a*, *b* parámetros reales, se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{3} & si \quad x\le 0 \\ \sqrt{ax+b} & si \quad 0<x\le 3 \\ \dfrac{7}{2}-\dfrac{x}{6} & si \quad x>3 \end{cases}$$

a.- (*3 puntos*) Determine el valor de los parámetros para que *f(x)* sea continua.
b.- (*4 puntos*) Para dichos valores, analice si *f(x)* es derivable en *x = 0* y en *x = 3*.
c.- (*3 puntos*) Calcule el valor máximo y mínimo de *f(x)* si $x \in [6,9]$ y las coordenadas de los puntos donde se alcanzan dichos valores.

a.- Para que sea continua debe serlo en *x = 0* y en *x = 3*.

Continua en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2+2\sqrt{3}=2\sqrt{3} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{ax+b}=\sqrt{b} \\ f(0)=2\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow 2\sqrt{3}=\sqrt{b} \Rightarrow 4\cdot 3=b \Rightarrow \boxed{b=12}$$

La función queda $f(x)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{3} & si \quad x\le 0 \\ \sqrt{ax+12} & si \quad 0<x\le 3 \\ \dfrac{7}{2}-\dfrac{x}{6} & si \quad x>3 \end{cases}$

Continua en *x = 3*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{ax+12}=\sqrt{3a+12} \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{7}{2}-\dfrac{x}{6}=\dfrac{7}{2}-\dfrac{3}{6}=3 \\ f(3)=\sqrt{3a+12} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{3a+12}=3 \Rightarrow 3a+12=9 \Rightarrow 3a=-3 \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

Los valores buscados son *a = –1* y *b = 12.*
Con estos valores la expresión $\sqrt{-x+12}$ existe en el intervalo $0<x\le 3$.

b.- Para *a = –1* y *b = 12* la función queda $f(x)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{3} & si \quad x\le 0 \\ \sqrt{-x+12} & si \quad 0<x\le 3 \\ \dfrac{7}{2}-\dfrac{x}{6} & si \quad x>3 \end{cases}$

La derivada de la función en $\mathbb{R}-\{0,3\}$ es $f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<0 \\ \dfrac{-1}{2\sqrt{-x+12}} & si \quad 0<x<3 \\ -\dfrac{1}{6} & si \quad x>3 \end{cases}$

Estudiamos su derivabilidad en $x = 0$ viendo si coinciden sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 2\cdot 0 = 0 \\ f'(0^+) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-0+12}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{12}} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

No es derivable en $x = 0$.

Estudiamos su derivabilidad en $x = 3$ viendo si coinciden sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-3+12}} = \dfrac{-1}{6} \\ f'(3^+) = -\dfrac{1}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+)$$

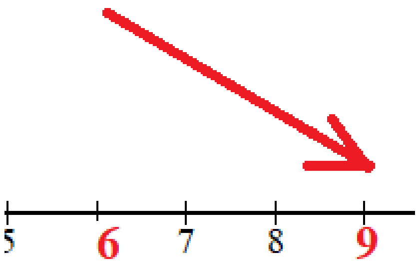
Si es derivable en $x = 3$.

c.- En el intervalo $[6,9]$ la función es $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{x}{6}$.

Buscamos los extremos relativos.

$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{x}{6} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{6} < 0$$

La función siempre es decreciente.



El valor máximo se alcanza en $x = 6$ y el mínimo en $x = 9$.

El valor máximo es $f(6) = \frac{7}{2} - \frac{6}{6} = \frac{5}{2} = 2.5$ y el mínimo es $f(9) = \frac{7}{2} - \frac{9}{6} = 2$.

Las coordenadas del máximo son (6, 2.5) y del mínimo son (9, 2)

5.- (*10 puntos*) Responde a las dos cuestiones siguientes:
a.- (*6 puntos*) Se ha realizado una encuesta sobre la compra de ropa por internet, en concreto sobre compra de ropa nueva y compra de ropa de segunda mano. De los entrevistados, el 90% dice que compra ropa (usada o nueva), el 15% compra ropa de ambos tipos y el 60% no compra ropa de segunda mano. Para un encuestado elegido al azar:
a.1 (*3 puntos*) Calcule la probabilidad de que compre ropa nueva y no de segunda mano.
a.2 (*3 puntos*) Si dice que no compra ropa de segunda mano ¿cuál es la probabilidad de que tampoco compre ropa nueva?
b.- (*4 puntos*) En una encuesta realizada a 64 jóvenes 8 se mostraron contrarios a llevar mascarillas en el interior de recintos de ocio. Calcule un intervalo de confianza al 97% para determinar la proporción de jóvenes que son contrarios al uso de mascarilla en interiores de recintos de ocio.
Por otro lado, el alcalde de la ciudad considera que si existe un 25% de jóvenes adversos al uso de mascarilla se requiere aplicar algún tipo de medida de concienciación. A la vista del intervalo calculado ¿se debería implantar alguna medida de concienciación?

a.- Realizamos una tabla de contingencia.

	Compra ropa nueva	No compra ropa nueva	
Compra ropa usada	**15**		
No compra ropa usada			**60**
			100

Completamos la tabla de contingencia.

	Compra ropa nueva	No compra ropa nueva	
Compra ropa usada	**15**	**25**	**40**
No compra ropa usada			**60**
			100

Como dicen que el 90% dice que compra ropa (usada o nueva) y tenemos que el 15 % compra de los dos tipos y 25 % compra usada pero no nueva entonces los que compran ropa nueva y no usada son 90 – 15 – 25 = **50** %.
Seguimos completando la tabla.

	Compra ropa nueva	No compra ropa nueva	
Compra ropa usada	**15**	**25**	**40**
No compra ropa usada	**50**	**10**	**60**
	65	**35**	**100**

a.1 Utilizamos la regla de Laplace.

$$P\left(N \cap \overline{U}\right) = \frac{\text{Nº de personas que compran ropa nueva y no compran ropa usada}}{\text{Nº de personas}} = \frac{50}{100} = \boxed{0.5}$$

a.2 Utilizamos la regla de Laplace.

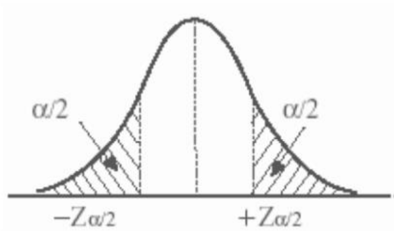
$$P\left(\overline{N} / \overline{U}\right) = \frac{\text{Nº personas que no compran ropa usada ni nueva}}{\text{Nº personas que no compran ropa usada}} = \frac{10}{60} = \boxed{0.167}$$

b.- El tamaño de la muestra es $n = 64$.

La proporción de contrarios a usar mascarilla es $p=\frac{8}{64}=\frac{1}{8}=0.125$ y la de partidarios de usarla es $q=1-0.125=0.875$.

Para un nivel de confianza del 97%

$$1-\alpha=0{,}97 \rightarrow \alpha=0{,}03 \rightarrow \alpha/2=0'015 \rightarrow 1-\alpha/2=0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2}=\mathbf{2{,}17}$$



Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}=2.17\cdot\sqrt{\frac{0.125\cdot 0.875}{64}}=0.0897$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p-Error,\ p+Error\right)=\left(0.125-0.0897,\ 0.125+0.0897\right)=\left(0.0353,\ 0.2147\right)$$

Para la segunda pregunta:

Un 25 % supone una proporción de 0.25.

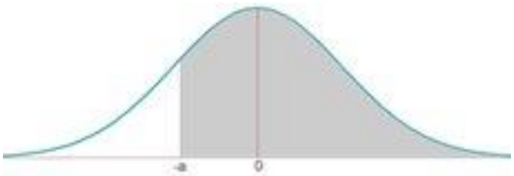
Como 0.25 no pertenece al intervalo de confianza porque es mayor que el extremo superior del intervalo, $0.25\notin\left(0.0353,\ 0.2147\right)$ significa que no es necesario hacer campaña de concienciación.

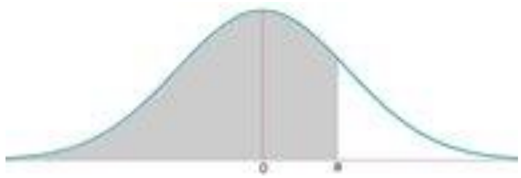
6.- (*10 puntos*) Por una prueba de acceso a la Universidad realizada a los estudiantes de segundo de Bachillerato, se sabe que las calificaciones obtenidas se distribuyen según una distribución normal.
a.- (*4 puntos*) Si la media de la prueba selectiva es de 65 puntos y la desviación típica 8. Calcule la probabilidad de que la nota media de 25 estudiantes elegidos al azar sea mayor a 63 puntos.
b.- (*3 puntos*) Calcule un intervalo de confianza para la nota media de ingreso en DADE, con un nivel de confianza del 92%, sabiendo que ingresan 100 estudiantes, que la nota media de acceso es de 80 puntos y que la desviación típica es 8,8 puntos.
c.- (*3 puntos*) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo del intervalo de confianza calculado en el apartado anterior se reduzca a la mitad (con los datos del apartado b.-).

Sea X la variable aleatoria que da la nota de un estudiante de segundo de bachillerato.

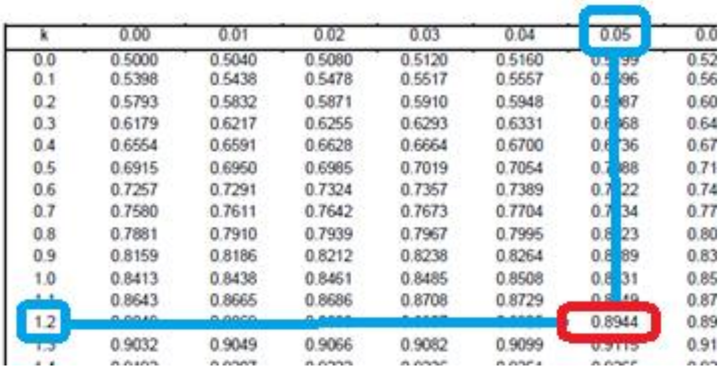
a.- Si $X = N(65,\ 8)$ entonces $\overline{X_{25}} = N\left(65, \frac{8}{\sqrt{25}}\right) = N(65{,}1.6)$

$$P\left(\overline{X_{25}} > 63\right) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \frac{\overline{X_{25}} - 65}{1.6} \end{matrix} \right\} = P\left(Z > \frac{63-65}{1.6}\right) = P(Z > -1.25) = \ldots$$



=


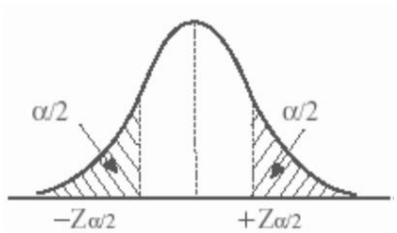
$$\ldots = P(Z \le 1.25) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = \boxed{0.8944}$$



k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]	0.52
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]	0.56
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	[illegible]	0.60
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	[illegible]	0.64
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	[illegible]	0.67
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	[illegible]	0.71
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	[illegible]	0.74
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	[illegible]	0.77
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	[illegible]	0.80
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	[illegible]	0.83
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	[illegible]	0.85
[illegible]	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	[illegible]	0.87
1.2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.8944	0.89
[illegible]	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	[illegible]	0.91

b.- Para un nivel de confianza del 92%

$$1 - \alpha = 0{,}92 \rightarrow \alpha = 0{,}08 \rightarrow \alpha/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}75}$$



El tamaño de la muestra es **n = 100**. La media es $\overline{x} = 80$. La desviación típica es $\sigma = 8.8$.

El error lo obtenemos con la fórmula.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{8.8}{\sqrt{100}} = 1.54$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x}-Error, \bar{x}+Error\right)=\left(80-1.54, 80+1.54\right)=\left(78.46, 81.54\right)$$

c.- Los datos son n = *100*. $\bar{x}=80$. $\sigma=8.8$

El error debe ser la mitad, es decir, 1.54 / 2 = 0.77 puntos.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.77 = 1.75\cdot\frac{8.8}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.77\sqrt{n} = 1.75\cdot 8.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.75\cdot 8.8}{0.77} \Rightarrow n = \left(\frac{1.75\cdot 8.8}{0.77}\right)^2 = 400$$

El tamaño mínimo para que el error sea de un máximo de 0.77 puntos es de 400 estudiantes.

.