Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2022
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (*10 puntos*) Dado el sistema lineal: $\left.\begin{array}{l}(m+1)x=m-2\\ 2x+y=-3\\ 3x-2y+mz=-8\end{array}\right\}$. Se pide:

- **a.-** (*3 puntos*) Exprese el sistema anterior en forma matricial ($AX = B$) y determine el valor(es) del parámetro *m* para que el sistema sea compatible determinado.
- **b.-** (*3 puntos*) ¿Existe algún valor del valor del parámetro *m* para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.
- **c.-** (*4 puntos*) Para $m = 1$, calcule $X = A^{-1}B$, siendo A,B las matrices del apartado **a.-**.

2.- (*10 puntos*) Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultados: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30% y la de los fondos de inversión sea del 5%. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas y además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3.000 euros y un mínimo de 1.000€.

- **a.-** (*3 puntos*) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.
- **b.-** (*5 puntos*) Resuelva el problema y calcule la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.
- **c.-** (*2 puntos*) Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35% para las criptomonedas y 0% para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1.000 euros en criptomonedas y 5.000 en fondos es una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

3.- (*10 puntos*) Dada $f(x)=50+\frac{1}{100}(1-x)+\frac{1}{1-x}$. Se pide:

- **a.-** (*2 puntos*) Calcule el dominio y, si existen, las asíntotas verticales y horizontales.
- **b.-** (*5 puntos*) Razone que *f(x)* tiene dos extremos relativos, uno mínimo y otro máximo ¿El valor en el mínimo de la función es mayor o menor que el valor en el máximo?
- **c.-** (*3 puntos*) Supongamos que *x* representa el precio de venta de un kg de solomillo según la época del año, $x\in[5,21]$ euros por kilo, y *f(x)* el ingreso diario de un mayorista (en cientos de euros) por la venta del producto ¿A qué precio debe vender para obtener el máximo ingreso? ¿A cuántos euros asciende dicho ingreso máximo?

4.- (*10 puntos*) La primera derivada de una cierta función es $f'(x)=x(x-1)^2$

- **a.-** (*3 puntos*) ¿En qué intervalo *f(x)* es creciente? y ¿decreciente? Calcule los extremos relativos.
- **b.-** (*4 puntos*) ¿En qué intervalo es cóncava la gráfica de *f(x)*? ¿y convexa? Calcule los puntos de inflexión de *f(x)*.
- **c.-** (*3 puntos*) Determine *f(x)* sabiendo que *f(0) = 10.*

5.- (*10 puntos*) Responde a las cuestiones siguientes:

a.- (*7 puntos*) Una aseguradora ha lanzado seguros multidispositivos a jóvenes para contingencias de hurtos, roturas, daños, etc. de patinetes, teléfonos móviles y ordenadores portátiles. Los seguros de patinetes suponen el 40% de su cartera, los móviles representan el 45% y los portátiles el resto de su cartera. La compañía conoce que un 51% de patinetes, un 40% de teléfonos móviles y un 9% de ordenadores dan lugar a un parte de siniestro.

a.1 (*2 puntos*) Calcule la probabilidad de que se comunique un parte de siniestro.

a.2 (*2 puntos*) Si llegara un parte de siniestro, calcule la probabilidad de haber sido una contingencia por un teléfono móvil.

a.3 (*3 puntos*) Si llegara un parte de siniestro, ¿cuál de los tres dispositivos es más probable que haya causado la contingencia?

b.- (*3 puntos*) En una ciudad se ha encuestado a 100 personas preguntándoles si tenían contratado algún seguro para su teléfono móvil. Se obtuvo como resultado que 15 personas tenían contratado este tipo de seguro. Determine un intervalo de confianza al 96% para la proporción de personas de esa ciudad que tienen contratado un seguro para su móvil.

6.- (*10 puntos*) El tiempo de espera para recibir en casa «tu compra en pocos minutos» se distribuye según una distribución normal de varianza 16 minutos.

a.- (*3 puntos*) Si la media para el tiempo de espera fuera de 12 minutos, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de 7 pedidos fuese de más de 10 minutos?

b.- (*4 puntos*) Si la media obtenida a partir de una muestra aleatoria de 49 encargos fue de 12 minutos, calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97%.

c.- (*3 puntos*) Con datos de 16 encargos se ha calculado el intervalo de confianza (9,7; 13,5) minutos para el tiempo medio en recibir el pedido. Determine el nivel de confianza de ese intervalo.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (*10 puntos*) Dado el sistema lineal: $\left.\begin{array}{l}(m+1)x=m-2\\ 2x+y=-3\\ 3x-2y+mz=-8\end{array}\right\}$. Se pide:

a.- (*3 puntos*) Exprese el sistema anterior en forma matricial ($AX = B$) y determine el valor(es) del parámetro *m* para que el sistema sea compatible determinado.
b.- (*3 puntos*) ¿Existe algún valor del valor del parámetro *m* para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.
c.- (*4 puntos*) Para $m = 1$, calcule $X = A^{-1}B$, siendo *A*, *B* las matrices del apartado **a.-**.

$$\left.\begin{array}{l}(m+1)x=m-2\\ 2x+y=-3\\ 3x-2y+mz=-8\end{array}\right\}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}m+1&0&0\\2&1&0\\3&-2&m\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}m-2\\-3\\-8\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}m+1&0&0\\2&1&0\\3&-2&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m-2\\-3\\-8\end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de la matriz A y de la matriz ampliada A/B en función del valor de *m*.

$$|A|=\begin{vmatrix}m+1&0&0\\2&1&0\\3&-2&m\end{vmatrix}=(m+1)m$$

$$|A|=0\Rightarrow(m+1)m=0\Rightarrow\begin{cases}m+1=0\Rightarrow m=-1\\ o\\ m=0\end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. Si $m\neq 0\, y\, m\neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $m=0$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda el sistema e intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l}x=-2\\ 2x+y=-3\\ 3x-2y=-8\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-4+y=-3\\ -6-2y=-8\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y=1\\ -2y=-2\to y=1\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{Solución:\begin{cases}x=-2\\ y=1\quad ,t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda el sistema e intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} 0=-1-2 \\ 2x+y=-3 \\ 3x-2y-z=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible.

a.-

$$\left.\begin{array}{l} (m+1)x=m-2 \\ 2x+y=-3 \\ 3x-2y+mz=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m-2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible determinado cuando $m \neq 0 \, y \, m \neq -1$.

b.- Es compatible indeterminado cuando $m=0$.
Está resuelto en el estudio previo y la solución es: $x=-2;\ y=1;\ z=t;\ \ t \in \mathbb{R}$.

c.- Para $m = 1$ las matrices quedan $A=\begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 1-2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Calculamos la inversa de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0; \text{ Existe la inversa de A.}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $X=A^{-1}B$.

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1-3 \\ 7/2-6-8 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ -21/2 \end{pmatrix}}$$

2.- (*10 puntos*) Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultados: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30% y la de los fondos de inversión sea del 5%. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas y además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3.000 euros y un mínimo de 1.000€.
a.- (*3 puntos*) Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.
b.- (*5 puntos*) Resuelva el problema y calcule la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.
c.- (*2 puntos*) Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35% para las criptomonedas y 0% para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1.000 euros en criptomonedas y 5.000 en fondos es una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

a) Llamamos x = número de euros invertidos en criptomonedas, y = número de euros invertidos en fondos de inversión.

Queremos maximizar la rentabilidad: $R(x,y)=0.3x+0.05y$

Las restricciones son:

"Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir" → $x+y\leq 10000$
"Quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas" → $x\leq y$
"Le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3.000 euros y un mínimo de 1.000 euros" → $1000\leq x\leq 3000$
Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 10000 \\ x\leq y \\ 1000\leq x\leq 3000 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\leq 10000 \\ 0\leq y-x \\ 1000\leq x\leq 3000 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$x+y=10000$

x	$y=10000-x$
1000	9000
3000	7000

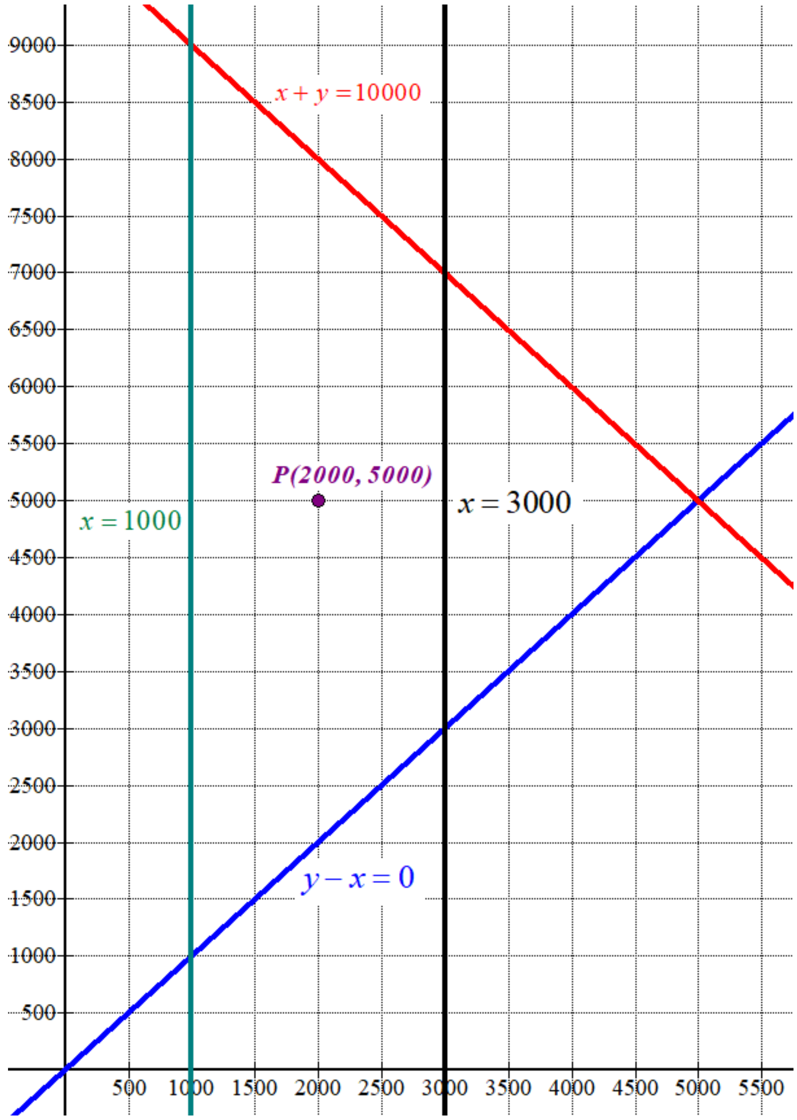
$y-x=0$

x	$y=x$
1000	1000
3000	3000

$x=1000$ — Recta vertical

$x=3000$ — Recta vertical

$x\geq 0;\ \ y\geq 0$ — Primer cuadrante

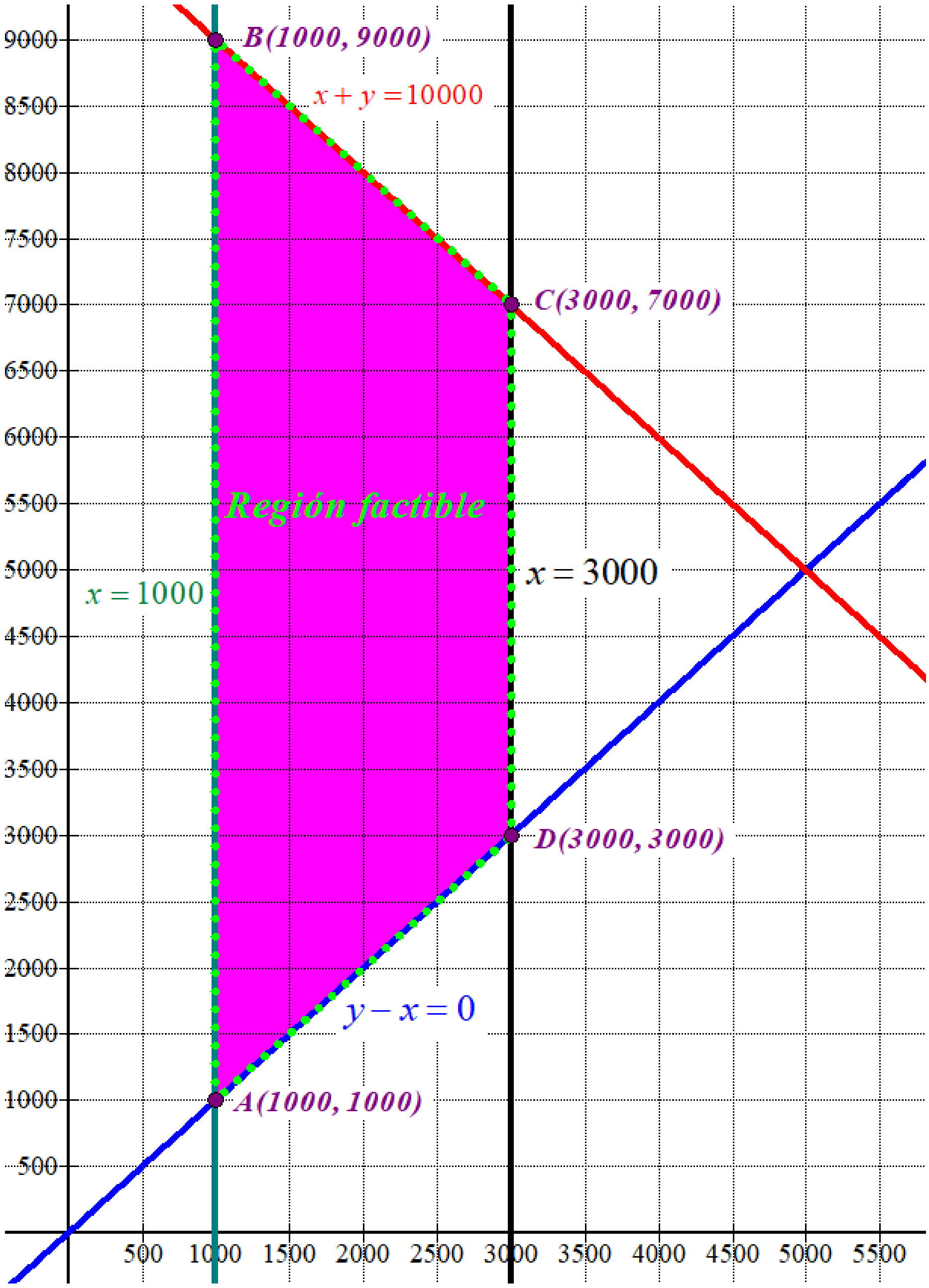


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y \leq 10000 \\ 0 \leq y-x \\ 1000 \leq x \leq 3000 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de la recta roja, por encima de la recta azul y entre las rectas verticales verde y negra.

Comprobamos que el punto P(2000, 5000) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2000+5000 \leq 10000 \\ 0 \leq 5000-2000 \\ 1000 \leq 2000 \leq 3000 \\ 2000 \geq 0; \quad 5000 \geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función rentabilidad $R(x,y)=0.3x+0.05y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

A(1000, 1000) → $R(1000,1000)=300+50=350$

B(1000, 9000) → $R(1000,9000)=300+450=750$

C(3000, 7000) → $R(3000,7000)=900+350=1250$ ¡Máximo!

D(3000, 3000) → $R(3000,3000)=900+150=1050$

El valor máximo es 1250 y se obtiene en C(3000, 7000).
Invirtiendo 3000 € en criptomonedas y 7000 € en fondos de inversión se obtiene una rentabilidad máxima, siendo esta de 1250 €.

c) Cambiamos la función objetivo por la de riesgo $G(x,y)=0.35x+0y=0.35x$ intentando minimizar su valor.
Valoramos esta función en los vértices de la región factible en busca del valor mínimo.

A(1000, 1000) → $G(1000,1000) = 350$ ¡Mínimo!

B(1000, 9000) → $G(1000,9000) = 350$ ¡Mínimo!

C(3000, 7000) → $G(3000,3000) = 1050$

D(3000, 3000) → $G(3000,3000) = 1050$

El valor mínimo se alcanza en dos vértices (A y B) lo que implica que cualquier punto que esté en el segmento AB es una solución óptima del problema.
Como Q(1000, 5000) pertenece al segmento AB es una solución óptima del problema.

3.- (*10 puntos*) Dada $f(x)=50+\frac{1}{100}(1-x)+\frac{1}{1-x}$. Se pide:
a.- (*2 puntos*) Calcule el dominio y, si existen, las asíntotas verticales y horizontales.
b.- (*5 puntos*) Razone que *f(x)* tiene dos extremos relativos, uno mínimo y otro máximo ¿El valor en el mínimo de la función es mayor o menor que el valor en el máximo?
c.- (*3 puntos*) Supongamos que *x* representa el precio de venta de un kg de solomillo según la época del año, $x\in[5,21]$ euros por kilo, y *f(x)* el ingreso diario de un mayorista (en cientos de euros) por la venta del producto ¿A qué precio debe vender para obtener el máximo ingreso? ¿A cuántos euros asciende dicho ingreso máximo?

a.- El dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
$$Dominio\ f(x)=\mathbb{R}-\{1\}$$

Asíntota vertical. $x=a$
¿$x=1$ es asíntota vertical?
$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} 50+\frac{1}{100}(1-x)+\frac{1}{1-x}=50+\frac{1}{100}(1-1)+\frac{1}{1-1}=50+\frac{1}{0}=\infty$$
$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$
$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 50+\frac{1}{100}(1-x)+\frac{1}{1-x}=50+\frac{1}{100}(1-\infty)+\frac{1}{1-\infty}=50-\infty+0=-\infty$$
No existe asíntota horizontal.

b.- Calculamos la función derivada y vemos cuando se anula.

$$f'(x)=\frac{1}{100}(-1)+\frac{-1(-1)}{(1-x)^2}=-\frac{1}{100}+\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -\frac{1}{100}+\frac{1}{(1-x)^2}=0\Rightarrow \frac{1}{100}=\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow (1-x)^2=100\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-x=\sqrt{100}=\pm 10\Rightarrow \begin{cases}1-x=-10\Rightarrow \boxed{x=11}\\ 1-x=10\Rightarrow \boxed{x=-9}\end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada y comprobamos si son máximos o mínimos.

$$f'(x)=-\frac{1}{100}+\frac{1}{(1-x)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{-1\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4}=\frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f''(-9)=\frac{2}{(1-(-9))^3}=\frac{2}{1000}>0\to x=-9 \text{ es mínimo relativo}$$

$$f''(11)=\frac{2}{(1-11)^3}=-\frac{2}{1000}<0\to x=11 \text{ es máximo relativo}$$

Como $f(-9) = 50 + \frac{1}{100}(1-(-9)) + \frac{1}{1-(-9)} = \boxed{\frac{251}{5}}$ y

$f(11) = 50 + \frac{1}{100}(1-11) + \frac{1}{1-11} = \boxed{\frac{249}{5}}$ tenemos que $f(11) = \frac{249}{5} < \frac{251}{5} = f(-9)$, es decir, el valor en el mínimo relativo es mayor que en el máximo relativo.

c.- Hemos hallado el máximo de la función ingresos $f(x) = 50 + \frac{1}{100}(1-x) + \frac{1}{1-x}$ y el máximo ingreso se obtiene con el precio *x = 11*, siendo estos ingresos máximos de $\frac{249}{5} = 49.8 \rightarrow 4980\,€$.

Pero hay que valorar los ingresos en los extremos del intervalo:

$$\begin{cases} f(5) = 50 + \frac{1}{100}(1-5) + \frac{1}{1-5} = 49.71 \rightarrow \boxed{4971€} \\ f(21) = 50 + \frac{1}{100}(1-21) + \frac{1}{1-21} = 49.75 \rightarrow \boxed{4975€} \end{cases}$$

El máximo absoluto de la función en el intervalo [5, 21] se obtiene en *x = 11*, es decir, con un precio de 11 €/kg se obtienen unos ingresos máximos de 4980 €.

4.- (*10 puntos*) La primera derivada de una cierta función es $f'(x)=x(x-1)^2$

a.- (*3 puntos*) ¿En qué intervalo *f(x)* es creciente? y ¿decreciente? Calcule los extremos relativos.

b.- (*4 puntos*) ¿En qué intervalo es cóncava la gráfica de *f(x)*? ¿y convexa? Calcule los puntos de inflexión de *f(x)*.

c.- (*3 puntos*) Determine *f(x)* sabiendo que *f(0) = 10*.

a.- Igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos.

$$f'(x)=0 \Rightarrow x(x-1)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=1} \end{cases}$$

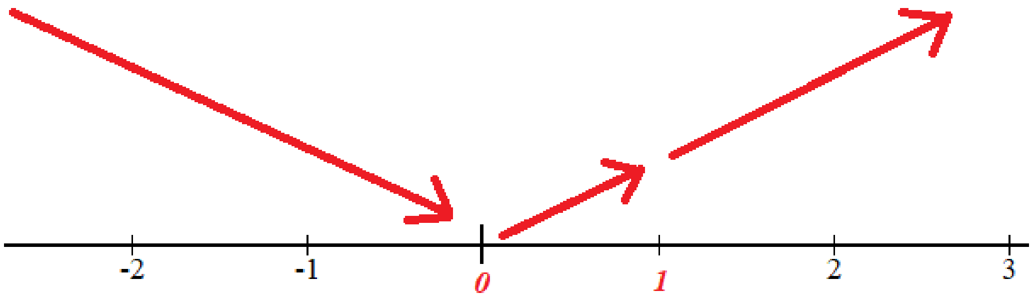
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1)=-1(-1-1)^2=-4<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.

En el intervalo $(0,1)$ tomamos *x = 0.5* y la derivada vale $f'(x)=0.5(0.5-1)^2=0.125>0$. La función crece en $(0,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=2(2-1)^2=2>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en *x = 0*.

b.- Hallamos la segunda derivada y la igualamos a cero para el estudio de la curvatura.

$$f'(x)=x(x-1)^2=x(x^2-2x+1)=x^3-2x^2+x \Rightarrow f''(x)=3x^2-4x+1$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 3x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{6}=\frac{4\pm 2}{6}=\begin{cases} \dfrac{4-2}{6}=\boxed{\dfrac{1}{3}=x} \\ \dfrac{4+2}{6}=\boxed{1=x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes, entre y después de estos valores.

En el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ tomamos *x = 0* y la segunda derivada vale

$f''(0) = 3\cdot 0^2 - 4\cdot 0 + 1 = 1 > 0$. La función es convexa (∪) en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ tomamos *x = 0.5* y la segunda derivada vale

$f''(0.5) = 3\cdot 0.5^2 - 4\cdot 0.5 + 1 = \frac{-1}{4} < 0$. La función es cóncava (∩) en $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos *x = 2* y la segunda derivada vale

$f''(2) = 3\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + 1 = 5 > 0$. La función es convexa (∪) en $(1, +\infty)$.

La función es convexa (∪) en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ y cóncava (∩) en $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$.

La función presenta dos puntos de inflexión (cambio de curvatura): $x = \frac{1}{3}$ y $x = 1$.

c.- Calculamos la integral de la derivada obteniendo la función.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int x^3 - 2x^2 + x\,dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + K$$

Determinamos el valor de *K* sabiendo que *f(0) = 10*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + K \\ f(0) = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{0^4}{4} - 2\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + K = 10 \Rightarrow K = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 10}$$

5.- (*10 puntos*) Responde a las cuestiones siguientes:

a.- (*7 puntos*) Una aseguradora ha lanzado seguros multidispositivos a jóvenes para contingencias de hurtos, roturas, daños, etc. de patinetes, teléfonos móviles y ordenadores portátiles. Los seguros de patinetes suponen el 40% de su cartera, los móviles representan el 45% y los portátiles el resto de su cartera. La compañía conoce que un 51% de patinetes, un 40% de teléfonos móviles y un 9% de ordenadores dan lugar a un parte de siniestro.

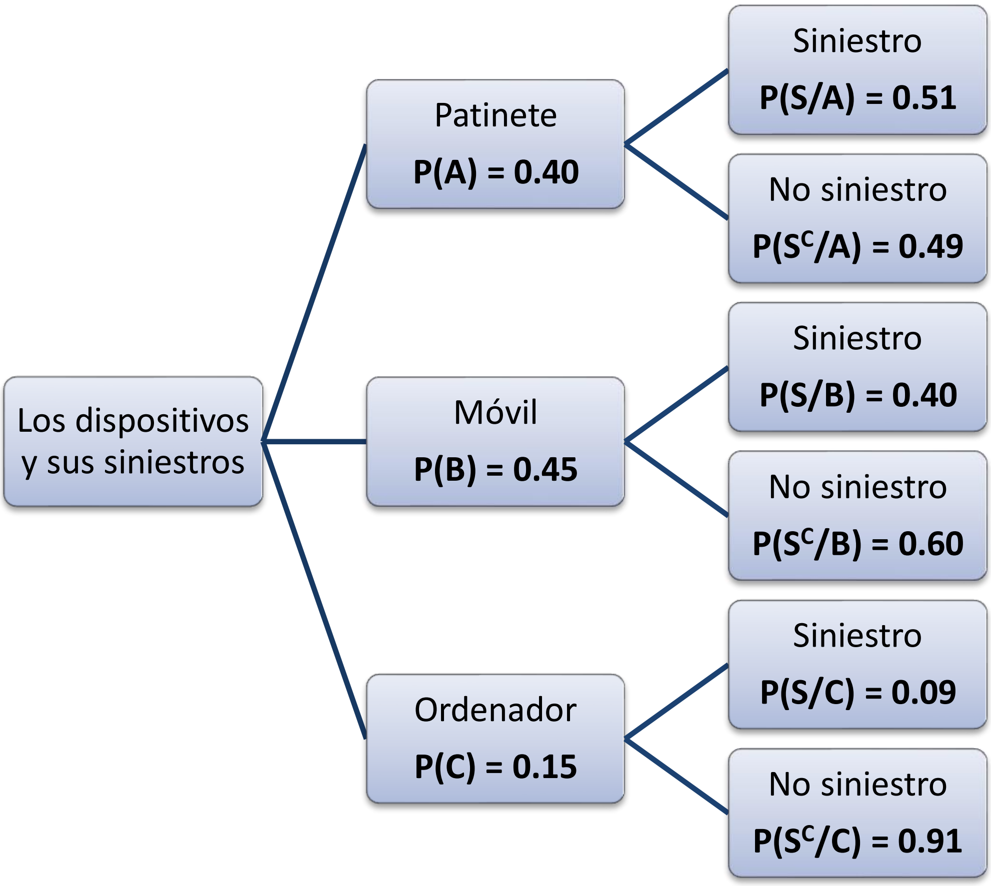
a.1 (*2 puntos*) Calcule la probabilidad de que se comunique un parte de siniestro.

a.2 (*2 puntos*) Si llegara un parte de siniestro, calcule la probabilidad de haber sido una contingencia por un teléfono móvil.

a.3 (*3 puntos*) Si llegara un parte de siniestro, ¿cuál de los tres dispositivos es más probable que haya causado la contingencia?

b.- (*3 puntos*) En una ciudad se ha encuestado a 100 personas preguntándoles si tenían contratado algún seguro para su teléfono móvil. Se obtuvo como resultado que 15 personas tenían contratado este tipo de seguro. Determine un intervalo de confianza al 96% para la proporción de personas de esa ciudad que tienen contratado un seguro para su móvil.

a.- Llamamos A = "el dispositivo es un patinete", B = "el dispositivo es un teléfono móvil", C = "el dispositivo es un ordenador portátil" y S = "Tener un siniestro".
Realizamos un diagrama de árbol.



a.1.- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S) = P(A)P(S/A) + P(B)P(S/B) + P(C)P(S/C) =$$

$$= 0.40 \cdot 0.51 + 0.45 \cdot 0.40 + 0.15 \cdot 0.09 = \boxed{0.3975}$$

a.2.- Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/S)=\frac{P(B\cap S)}{P(S)}=\frac{P(B)P(S/B)}{P(S)}=\frac{0.45\cdot 0.40}{0.3975}=\boxed{\frac{24}{53}\simeq 0.453}$$

a.3.- Calculamos la probabilidad de que habiendo un siniestro sea por una contingencia de patinete, Y lo mismo para ordenador.

$$P(A/S)=\frac{P(A\cap S)}{P(S)}=\frac{P(A)P(S/A)}{P(S)}=\frac{0.40\cdot 0.51}{0.3975}=\boxed{\frac{136}{265}\simeq 0.513}$$

$$P(C/S)=\frac{P(C\cap S)}{P(S)}=\frac{P(C)P(S/C)}{P(S)}=\frac{0.15\cdot 0.09}{0.3975}=\boxed{\frac{9}{265}\simeq 0.034}$$

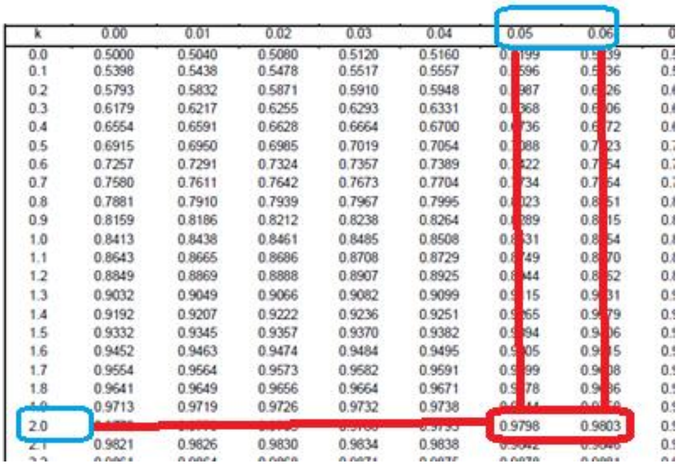
Como $P(A/S)=0.513$, $P(B/S)=0.453$ y $P(C/S)=0.034$ l lo más probable es que la contingencia provenga de un patinete.

b.- El tamaño de la muestra es *n = 100.*

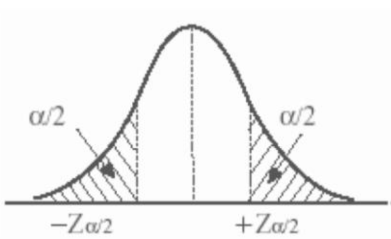
La proporción de personas que tienen contratado un seguro para su teléfono móvil es $p=\frac{15}{100}=0.15$ y la proporción de los que no lo tienen contratado es $q=1-0.15=0.85$.

Para un nivel de confianza del 96%

$1 - \propto = 0,96 \rightarrow \propto = 0,04 \rightarrow \propto/2 = 0'02 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0,98 \rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{2.05+2.06}{2}=2.055$



k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	[illegible]	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	[illegible]	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	[illegible]	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	[illegible]	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	[illegible]	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	[illegible]	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	[illegible]	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	[illegible]	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	[illegible]	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	[illegible]	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	[illegible]	[illegible]
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	[illegible]	[illegible]
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	[illegible]	[illegible]
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	[illegible]	[illegible]
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	[illegible]	[illegible]
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	[illegible]	[illegible]
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	[illegible]	[illegible]
2.0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9798	0.9803
[illegible]	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	[illegible]	[illegible]



Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}=2.055\cdot\sqrt{\frac{0.15\cdot 0.85}{100}}=0.0734$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p-Error,\ p+Error\right)=(0.15-0.0734,\,0.15+0.0734)=(0.0766,\,0.2234)$$

6.- (*10 puntos*) El tiempo de espera para recibir en casa «tu compra en pocos minutos» se distribuye según una distribución normal de varianza 16 minutos.
a.- (*3 puntos*) Si la media para el tiempo de espera fuera de 12 minutos, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de 7 pedidos fuese de más de 10 minutos?

b.- (*4 puntos*) Si la media obtenida a partir de una muestra aleatoria de 49 encargos fue de 12 minutos, calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97%.

c.- (*3 puntos*) Con datos de 16 encargos se ha calculado el intervalo de confianza (9,7; 13,5) minutos para el tiempo medio en recibir el pedido. Determine el nivel de confianza de ese intervalo.

Sea X la variable aleatoria que da el tiempo de espera para recibir en casa «tu compra en pocos minutos».

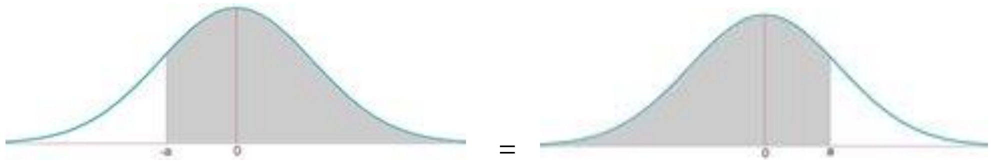
Como la varianza es 16 la desviación típica es $\sqrt{16}=4$ minutos. X = N(μ, 4)

a.- Si μ = 12 → $X = N(12,\ 4)$ entonces $\overline{X_7} = N\left(12, \dfrac{4}{\sqrt{7}}\right)$

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_7} \geq 10\right)$

$$P\left(\overline{X_7} \geq 10\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{10-12}{4/\sqrt{7}}\right) = P\left(Z \geq -1.32\right) = P\left(Z \leq 1.32\right) =$$

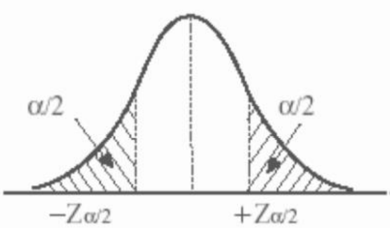
$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = \boxed{0.9066}$$



k	0.00	0.01	0.02
0.0	0.5000	0.5040	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	[illegible]
[illegible]	0.8849	0.8869	[illegible]
1.3	[illegible]	[illegible]	0.9066
1.4	0.9192	0.9207	0.9222

b.- Para un nivel de confianza del 97%

1 – ∝ = 0.97 → ∝ = 0.03 →∝/2 = 0.015 →1 – ∝/2 = 0.985 → $z_{\alpha/2}$ = **2.17**



k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	[illegible]
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	[illegible]
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	[illegible]
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	[illegible]
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	[illegible]
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	[illegible]
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	[illegible]
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	[illegible]
[illegible]	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	[illegible]
2.1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9850
[illegible]	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	[illegible]

El tamaño de la muestra es **n = 49**. La media es $\bar{x} = 12$. La desviación típica es $\sigma = 4$.

El error lo obtenemos con la fórmula.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{4}{\sqrt{49}} = 1.24 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (12 - 1.24, 12 + 1.24) = (10.76, 13.24)$$

c.- Los datos son $n = 16$, $\sigma = 4$. El intervalo de confianza es (9,7; 13,5) minutos.

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

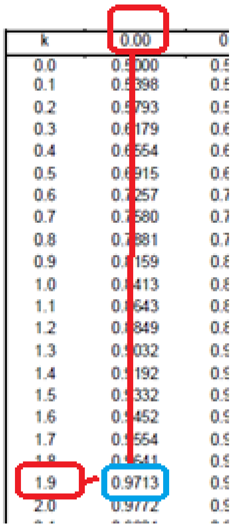
$$Error = \frac{13.5 - 9.7}{2} = 1.9$$

Utilizamos la fórmula del error para obtener $z_{\alpha/2}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.9 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{4}{\sqrt{16}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.9$$

Obtenemos el nivel de confianza a partir del valor de $z_{\alpha/2} = 1.9$.

$$z_{\alpha/2} = 1.9 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.9713 \Rightarrow \alpha/2 = 0.0287 \Rightarrow \alpha = 0.0574 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.9426}$$



k	0.00	0
0.0	0.5000	0.5
0.1	0.5398	0.5
0.2	0.5793	0.5
0.3	0.6179	0.6
0.4	0.6554	0.6
0.5	0.6915	0.6
0.6	0.7257	0.7
0.7	0.7580	0.7
0.8	0.7881	0.7
0.9	0.8159	0.8
1.0	0.8413	0.8
1.1	0.8643	0.8
1.2	0.8849	0.8
1.3	0.9032	0.9
1.4	0.9192	0.9
1.5	0.9332	0.9
1.6	0.9452	0.9
1.7	0.9554	0.9
1.8	0.9641	0.9
1.9	0.9713	0.9
2.0	0.9772	0.9

Como $1 - \alpha = 0.9426$ el nivel de confianza es del 94.26 %.