Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2021
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & m \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

a.- (*3 puntos*) Determina los valores del parámetro m para que A tenga inversa. Para $m = 2$, calcula A^{-1}.

b.- (*3 puntos*) Discute y resuelve, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones:

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.- (*10 puntos*) El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 u. de proteína y 3 u. de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3€ y 2€, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60€.

a.- *(8 puntos)* Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo.

b.- *(2 puntos)* Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg. de soja y 15 kg. de maíz?

3.- (*10 puntos*) Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x & si \quad x<0 \\ x^3-6x^2+9x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a.- *(3 puntos)* Estudia si $f(x)$ es continua en $x = 0$, ¿$f(x)$ es continua en la recta real?

b.- *(3 puntos)* Halla los mínimos y máximos absolutos de $f(x)$ en $x \in [1,4]$.

c.- *(1 punto)* Analiza la concavidad (∩) - convexidad (∪) de $f(x)$ cuando $x > 0$.

d.- *(3 puntos)* Calcula $\int_1^2 f(x)\,dx$

4.- (*10 puntos*) Dada la función:

$$f(x)=\frac{2x^2-16}{x+3}$$

a.- *(4 puntos)* Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b.- *(6 puntos)* Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en su dominio.

5.- *(10 puntos)* Los profesores Alvarado, Benítez y Cadiñanos, han corregido el 25%, 30% y 45%, respectivamente, de los exámenes de una oposición. Los porcentajes de cometer algún fallo en la corrección son 1%, 2% y 3%, respectivamente. Si se selecciona un examen al azar:

a.- *(3 puntos)* Calcula la probabilidad de que esté mal corregido.

b.- *(3 puntos)* El examen tiene un error de corrección, calcula la probabilidad de haber sido corregido por Benítez.

c.- *(4 puntos)* El examen tiene un error de corrección ¿qué corrector tiene mayor probabilidad de haber corregido mal el examen?

6.- *(10 puntos)* Se desea estimar la proporción de estudiantes que viven en un colegio mayor a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de estudiantes.

a.- *(6 puntos)* Por estudios previos se sabe que el porcentaje de estudiantes alojados en un colegio mayor es del 20%. ¿De qué tamaño debemos elegir la muestra para que el error de la estimación de la proporción sea menor de 0,1 con un nivel de confianza del 98%?

b.- *(4 puntos)* Se toma una muestra de 50 estudiantes y se observa que 12 se alojan en un colegio mayor, calcula el intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes alojados en un colegio mayor.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1.- (*10 puntos*) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & m\\ 6 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & m\\ 0 & 6 & 3\end{pmatrix}$, se pide:

a.- (*3 puntos*) Determina los valores del parámetro m para que A tenga inversa. Para m = 2, calcula A^{-1}.

b.- (*3 puntos*) Discute y resuelve, según los valores del parámetro m, el sistema de ecuaciones:

$$B\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

a.- La matriz tiene inversa si su determinante no es cero.

$$A=\begin{pmatrix}3 & m\\ 6 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}3 & m\\ 6 & 3\end{vmatrix}=9-6m$$

$$|A|=0\Rightarrow 9-6m=0\Rightarrow m=\frac{9}{6}=1.5$$

El determinante se anula para $m = 1.5$, por lo que existe la inversa de A para cualquier valor de m distinto de 1.5.

Para $m = 2$ existe la inversa, la calculamos.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 6 & 3\end{vmatrix}=-3\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}}{-3}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -6 & 3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2/3\\ 2 & -1\end{pmatrix}}$$

b.- El determinante de la matriz de coeficientes B es:

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & m\\ 0 & 6 & 3\end{vmatrix}=9-6m$$

$$|B|=0\Rightarrow 9-6m=0\Rightarrow m=\frac{9}{6}=1.5$$

Distinguimos dos casos.

CASO 1. $m\neq 1.5$

En este caso el determinante de B es no nulo y su rango es 3, al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

Lo resolvemos utilizando el método de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 3 & m\\ 0 & 6 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & m\\ 0 & 6 & 3\end{vmatrix}}=\frac{-6}{9-6m}=\frac{2}{2m-3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & m\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & m\\ 0 & 6 & 3\end{vmatrix}}=\frac{3}{9-6m}=\frac{1}{3-2m}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 6 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 3 & m\\ 0 & 6 & 3\end{vmatrix}}=\frac{-6}{9-6m}=\frac{2}{2m-3}$$

La solución es $x=z=\dfrac{2}{2m-3};\ y=\dfrac{1}{3-2m}$

CASO 2. $m=1.5$

En este caso el determinante de la matriz de coeficientes B es nulo y su rango no es 3. La matriz ampliada es $\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1.5 & 1\\ 0 & 6 & 3 & 0\end{pmatrix}$. La transformamos en una matriz triangular equivalente y obtenemos el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1.5 & 1\\ 0 & 6 & 3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\text{Fila } 3^{a} - 2\cdot\text{Fila } 2^{a} & & & \\ 0 & 6 & 3 & 0\\ 0 & -6 & -3 & -2\\ \hline 0 & 0 & 0 & -2\Rightarrow\\ \text{Nueva Fila } 3^{a} & & & \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 1.5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes B tiene rango 2 y la ampliada tiene rango 3, por lo que los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

2.- (*10 puntos*) El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 u. de proteína y 3 u. de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3€ y 2€, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60€.

a.- *(8 puntos)* Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo.

b.- *(2 puntos)* Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg. de soja y 15 kg. de maíz?

a.- Llamamos "x" a los kilos de soja e "y" a los kilos de maíz que deben consumir los cerdos. Hacemos una tabla para ordenar la información proporcionada.

	Proteínas	Grasa vegetal	Coste
Kilos de soja (x)	**5x**	**3x**	**3x**
Kilos de maíz (y)	**y**	**3y**	**2y**
Totales	$5x+y$	$3x+3y$	$3x+2y$

Deseamos minimizar el coste que viene dado por la expresión $C(x,y)=3x+2y$.

Las restricciones son:

"*La ingesta mínima es de 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal*" → $5x+y\geq 28; \quad 3x+3y\geq 36$

"*El granjero dispone de un presupuesto de 60€*" → $3x+2y\leq 60$

Las cantidades son positivas → $x\geq 0; \quad y\geq 0$

Juntamos las restricciones en un sistema de inecuaciones y dibujamos la región del plano que cumple todas las condiciones.

$$\left.\begin{array}{l} 5x+y\geq 28 \\ 3x+3y\geq 36 \\ 3x+2y\leq 60 \\ x\geq 0; \quad y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x+y\geq 28 \\ x+y\geq 12 \\ 3x+2y\leq 60 \\ x\geq 0; \quad y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región.

$5x+y=28$

x	$y=28-5x$
4	8
0	28

$x+y=12$

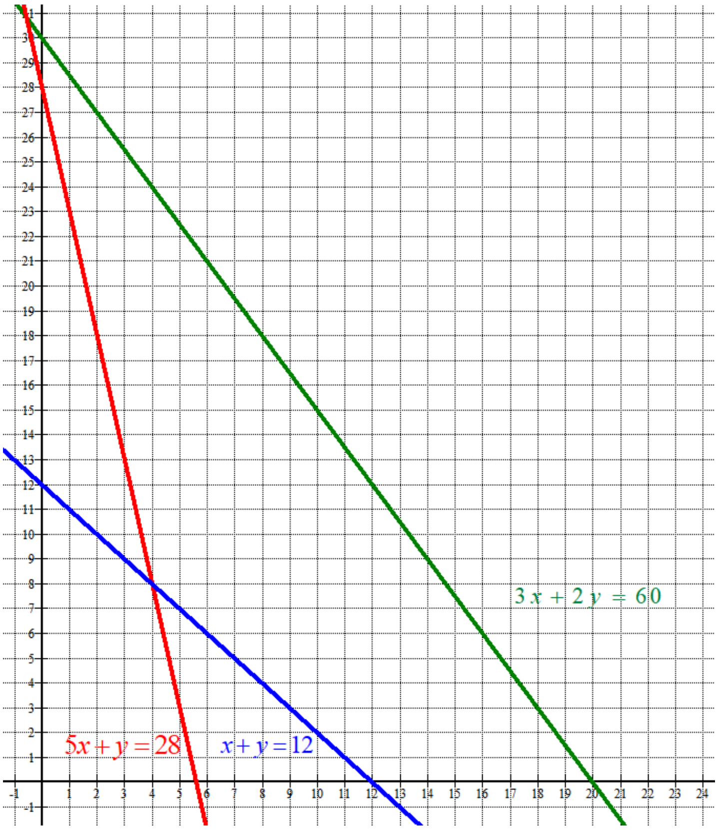
x	$y=12-x$
4	8
0	12

$3x+2y=60$

x	$y=\dfrac{60-3x}{2}$
0	30
20	0

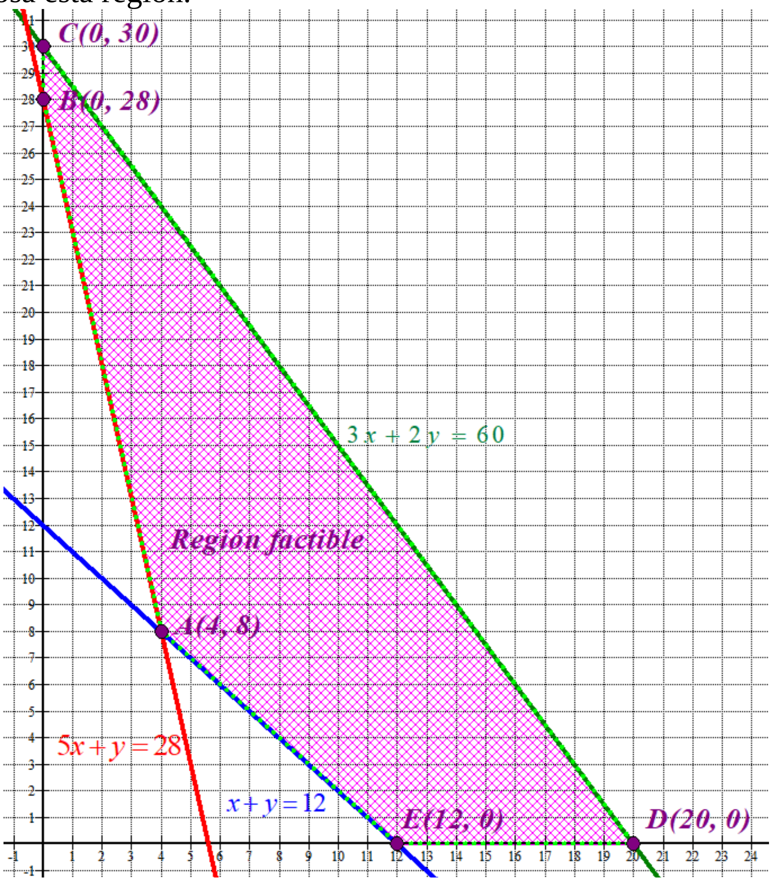
$x\geq 0; \quad y\geq 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 5x+y\geq 28 \\ x+y\geq 12 \\ 3x+2y\leq 60 \\ x\geq 0; \quad y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por encima de las rectas roja y azul y por debajo de la recta verde.

Coloreamos de rosa esta región.



Para encontrar el valor mínimo del coste en esta región valoramos la función $C(x,y)=3x+2y$ en cada uno de los vértices.

A(4, 8) → $C(4,8)=12+16=28$

B(0, 28) → $C(0,28)=0+56=56$

C(0, 30) → $C(0,30)=0+60=60$

D(20, 0) → $C(20,0)=60+0=60$

E(12, 0) → $C(12,0)=36+0=36$

El coste mínimo es de 28 € y se produce con el consumo de 4 kilos de soja y 8 de maíz.

b.- La dieta más cara es la de 60 € y se produce en todo el segmento comprendido entre los puntos C(0, 30) y D(20, 0), estos puntos cumplen la ecuación $3x+2y=60$ y el punto que se plantea como solución óptima es (12, 15) que no cumple la ecuación y no está en el segmento CD.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y=60 \\ ¿(12,\ 15)\in CD? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿36+30=60? \quad ¡\textit{No se cumple}!$$

La dieta sugerida no sería la óptima. Aunque es más cara no satisface todas las restricciones.

3.- (*10 puntos*) Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x & si \quad x<0\\ x^3-6x^2+9x & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

a.- *(3 puntos)* Estudia si $f(x)$ es continua en $x=0$, ¿$f(x)$ es continua en la recta real?

b.- *(3 puntos)* Halla los mínimos y máximos absolutos de $f(x)$ en $x\in[1,4]$.

c.- *(1 punto)* Analiza la concavidad (∩) - convexidad (∪) de $f(x)$ cuando $x>0$.

d.- *(3 puntos)* Calcula $\int_1^2 f(x)dx$

a.- Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse que $f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^3-6\cdot 0^2+9\cdot 0=0\\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}-x^2-2x=-0^2-0=0\\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^3-6x^2+9x=0\end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

La función es continua en $x = 0$.

Es continua en toda la recta pues está definida como dos trozos de funciones polinómicas, siendo ambas continuas en todo su dominio de definición.

b.- La función en el intervalo [1, 4] está definida como $f(x)=x^3-6x^2+9x$

Calculamos la derivada e igualamos a cero.

$$f(x)=x^3-6x^2+9x\Rightarrow f'(x)=3x^2-12x+9$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-12x+9=0\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=3\\ \frac{4-2}{2}=1\end{cases}$$

Calculamos el signo de la derivada segunda en cada uno de estos puntos críticos para decidir si son máximos o mínimos.

$$f'(x)=3x^2-12x+9\Rightarrow f''(x)=6x-12\Rightarrow\begin{cases}f''(1)=6-12=-6<0\\ f''(3)=18-12=6>0\end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

Como $f(1)=1^3-6+9=4$ y $f(3)=3^3-6\cdot 3^2+27=0$ el máximo relativo tiene coordenadas $(1,4)$ y el mínimo relativo $(3,0)$

Para obtener los máximos y mínimos absolutos valoramos la función en los extremos del intervalo [1, 4] y lo comparamos con los valores de los máximos y mínimos relativos.

$$f(1)=1^3-6+9=4;\quad f(3)=3^3-6\cdot 3^2+27=0 \text{ y } f(4)=4^3-6\cdot 4^2+36=4$$

Los máximos absolutos son (1, 4) y (4, 4). El mínimo absoluto es (3, 0).

c.- Cuando *x > 0* la función es $f(x)=x^3-6x^2+9x$.

Para estudiar la concavidad y convexidad utilizamos la derivada segunda y estudiamos sus cambios de signo.

$$f''(x)=6x-12 \Rightarrow f''(x)=0 \Rightarrow 6x-12=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de *x = 2*.

- En $(0,2)$ tomamos *x = 1* y la derivada segunda vale $f''(1)=6-12=-6<0$. La función es cóncava (∩) en $(0,2)$.
- En $(2,+\infty)$ tomamos *x = 3* y la derivada segunda vale $f''(3)=18-12=6>0$. La función es convexa (∪) en $(2,+\infty)$.

La función es cóncava (∩) en $(0,2)$ y convexa (∪) en $(2,+\infty)$.

d.- La función en el intervalo (1,2) es $f(x)=x^3-6x^2+9x$

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 x^3-6x^2+9xdx=\left[\frac{x^4}{4}-6\frac{x^3}{3}+9\frac{x^2}{2}\right]_1^2=$$

$$=\left[\frac{2^4}{4}-2\cdot 2^3+9\frac{2^2}{2}\right]-\left[\frac{1^4}{4}-2\cdot 1^3+9\frac{1^2}{2}\right]=4-16+18-\frac{1}{4}+2-\frac{9}{2}=\boxed{3.25}$$

4.- (*10 puntos*) Dada la función:

$$f(x)=\frac{2x^2-16}{x+3}$$

a.- *(4 puntos)* Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b.- *(6 puntos)* Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en su dominio.

a.- El dominio son todos los reales menos los que anulan el denominador.

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

Dominio *f(x)* = $\mathbb{R}-\{-3\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x = -3$?

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{2x^2-16}{x+3}=\frac{2\cdot(-3)^2-16}{-3+3}=\frac{2}{0}=\infty$$

La recta $x = -3$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-16}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{16}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{16}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{2-\frac{16}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+\frac{3}{\infty}}=\frac{2}{0}=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-16}{x+3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-16}{x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{16}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{16}{x^2}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{2-\frac{16}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-16}{x+3}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^2}-16-\cancel{2x^2}-6x}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x-16}{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-6x}{x}-\frac{16}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6-\frac{16}{x}}{1+\frac{3}{x}}=\frac{-6-\frac{16}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}}=-6$$

La asíntota oblicua es la recta $y=2x-6$

b.- Derivo e igualo a cero.

$$f(x)=\frac{2x^2-16}{x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x(x+3)-(2x^2-16)}{(x+3)^2}=\frac{4x^2+12x-2x^2+16}{(x+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+12x+16}{(x+3)^2}$$

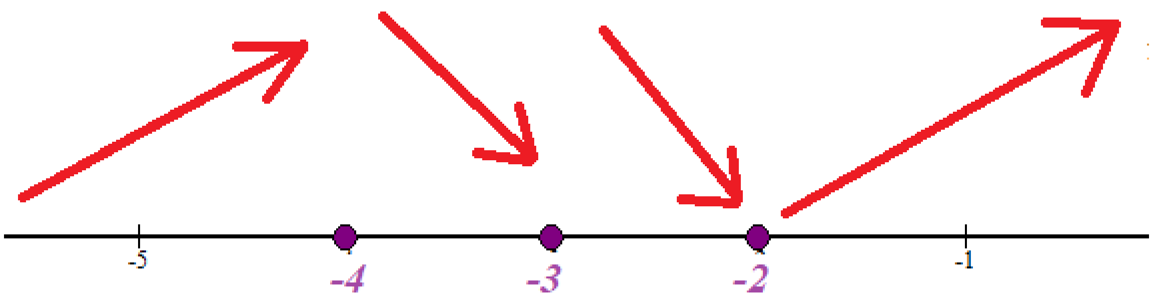
$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x^2+12x+16}{(x+3)^2}=0\Rightarrow 2x^2+12x+16=0\Rightarrow x^2+6x+8=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-32}}{2}=\frac{-6\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{-6+2}{2}=-2\\ \frac{-6-2}{2}=-4\end{cases}$$

Estudio el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(-\infty,-4)$ tomamos $x = -5$ y la derivada vale $f'(-5)=\frac{50-60+16}{(-5+3)^2}=\frac{6}{4}>0$. La función crece en $(-\infty,-4)$.
- En $(-4,-3)$ tomamos $x = -3.5$ y la derivada vale $f'(-3.5)=\frac{2x^2+12x+16}{(-3.5+3)^2}=\frac{-1.5}{+}<0$. La función decrece en $(-4,-3)$
- En $(-3,-2)$ tomamos $x = -2.5$ y la derivada vale $f'(-2.5)=\frac{2x^2+12x+16}{(-2.5+3)^2}=\frac{-1.5}{+}<0$. La función decrece en $(-3,-2)$
- En $(-2,+\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=\frac{0+0+16}{(0+3)^2}=\frac{16}{9}>0$. La función crece en $(-2,+\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función presenta un máximo relativo en $x = -4$.

Como $f(-4)=\frac{2(-4)^2-16}{-4+3}=-16$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-4, -16)$

La función presenta un mínimo relativo en $x = -2$.

Como $f(-2)=\frac{2(-2)^2-16}{-2+3}=-8$ el máximo relativo tiene coordenadas $(-2, -8)$

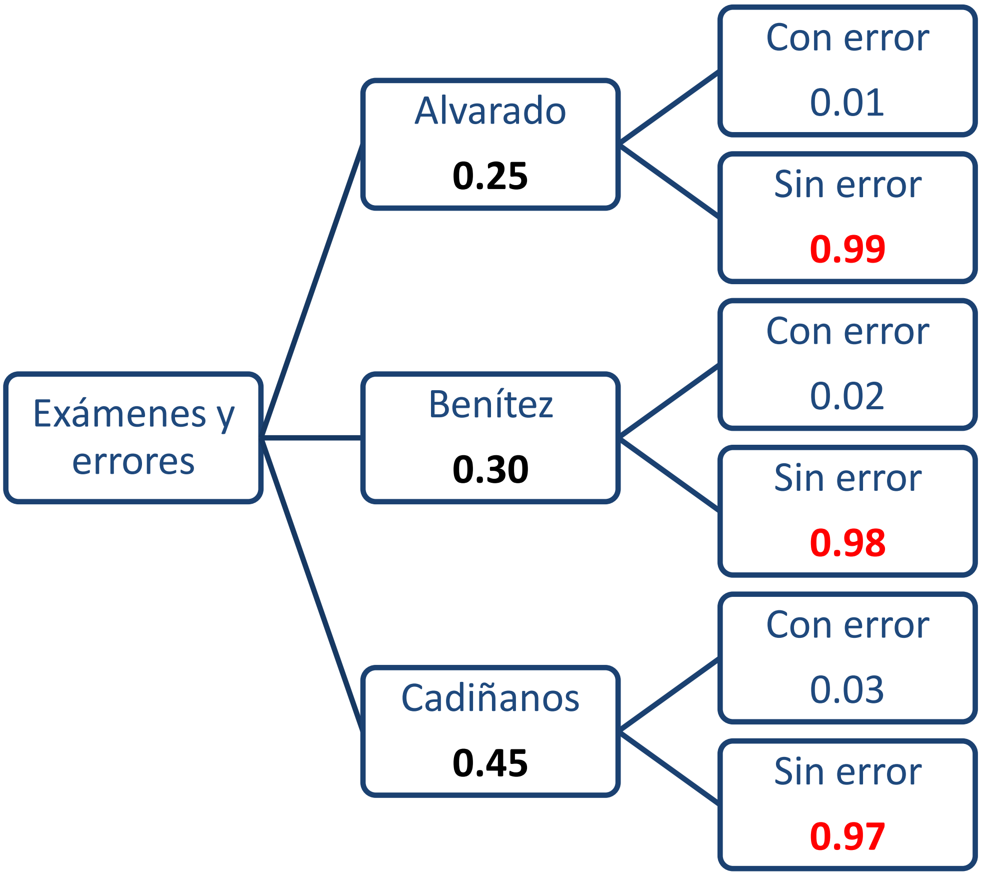
5.- *(10 puntos)* Los profesores Alvarado, Benítez y Cadiñanos, han corregido el 25%, 30% y 45%, respectivamente, de los exámenes de una oposición. Los porcentajes de cometer algún fallo en la corrección son 1%, 2% y 3%, respectivamente. Si se selecciona un examen al azar:

a.- *(3 puntos)* Calcula la probabilidad de que esté mal corregido.

b.- *(3 puntos)* El examen tiene un error de corrección, calcula la probabilidad de haber sido corregido por Benítez.

c.- *(4 puntos)* El examen tiene un error de corrección ¿qué corrector tiene mayor probabilidad de haber corregido mal el examen?

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos A = El examen lo corrige Alvarado, B = El examen lo corrige Benítez, C = El examen lo corrige Cadiñanos.
M = El examen está mal corregido. $\overline{M}$ = El examen está bien corregido.

a.- Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M)=P(A)P(M/A)+P(B)P(M/B)+P(C)P(M/C)=$$

$$=0.25\cdot 0.01+0.30\cdot 0.02+0.45\cdot 0.03=\boxed{0.022=2.2\,\%}$$

b.- Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/M)=\frac{P(B\cap M)}{P(M)}=\frac{P(B)P(M/B)}{P(M)}=\frac{0.30\cdot 0.02}{0.022}=\boxed{\frac{3}{11}\simeq 0.27}$$

c.- Hemos calculado $\boxed{P(B/M)=0.27}$, calculamos $P(A/M)$ y $P(C/M)$ y los comparamos.

$$P(A/M)=\frac{P(A\cap M)}{P(M)}=\frac{P(A)P(M/A)}{P(M)}=\frac{0.25\cdot 0.01}{0.022}=\boxed{\frac{5}{44}\simeq 0.11}$$

$$P(C/M)=\frac{P(C\cap M)}{P(M)}=\frac{P(C)P(M/C)}{P(M)}=\frac{0.45\cdot 0.03}{0.022}=\boxed{\frac{27}{44}\simeq 0.61}$$

Como $P(A/M)=0.11;\ P(B/M)=\frac{3}{11}$ y $P(C/M)=0.61$ el corrector que es más probable que lo haya corregido es Cardiñanos.

Es lógico pues es quien más exámenes corrige y el que más errores comete.

6.- *(10 puntos)* Se desea estimar la proporción de estudiantes que viven en un colegio mayor a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de estudiantes.

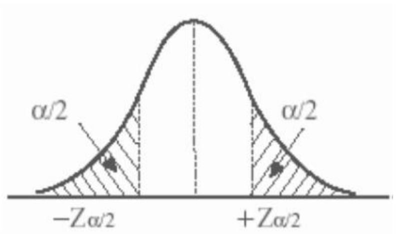
a.- *(6 puntos)* Por estudios previos se sabe que el porcentaje de estudiantes alojados en un colegio mayor es del 20%. ¿De qué tamaño debemos elegir la muestra para que el error de la estimación de la proporción sea menor de 0,1 con un nivel de confianza del 98%?

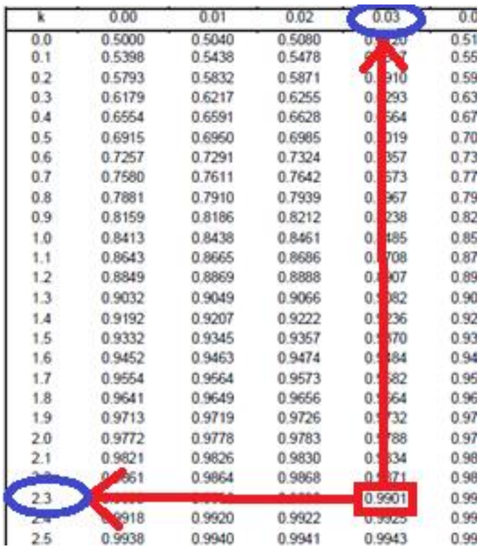
b.- *(4 puntos)* Se toma una muestra de 50 estudiantes y se observa que 12 se alojan en un colegio mayor, calcula el intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes alojados en un colegio mayor.

a.- $p = 0.2$ y $q = 1 - 0.2 = 0.8$.

Para un nivel de confianza del 98%

$$1 - \propto = 0{,}98 \rightarrow \propto = 0{,}02 \rightarrow \propto/2 = 0'01 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}33}$$





k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	[illegible]	0.51
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	[illegible]	0.55
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	[illegible]	0.59
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	[illegible]	0.63
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	[illegible]	0.67
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	[illegible]	0.70
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	[illegible]	0.73
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	[illegible]	0.77
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	[illegible]	0.79
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	[illegible]	0.82
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	[illegible]	0.85
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	[illegible]	0.87
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	[illegible]	0.89
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	[illegible]	0.90
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	[illegible]	0.92
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	[illegible]	0.93
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	[illegible]	0.94
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	[illegible]	0.95
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	[illegible]	0.96
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	[illegible]	0.97
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	[illegible]	0.97
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	[illegible]	0.98
[illegible]	[illegible]	0.9864	0.9868	[illegible]	0.98
2.3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9901	0.99
[illegible]	[illegible]	0.9920	0.9922	[illegible]	0.99
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.99

Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.1 = 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} \Rightarrow \frac{0.1}{2.33} = \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.1}{2.33}\right)^2 = \frac{0.2 \cdot 0.8}{n} \Rightarrow n = \frac{0.2 \cdot 0.8}{\left(\frac{0.1}{2.33}\right)^2} \simeq 86.86$$

El tamaño de la muestra debe ser al menos de 87 estudiantes.

b.- n = 50. $p = \frac{12}{50} = 0.24$, $q = 1 - \frac{12}{50} = 0.76$.

Para un nivel de confianza del 98 % tenemos que $z_{\alpha/2}$ **= 2,33.**

El error será:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.33 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{50}} \simeq 0.14$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.24 - 0.14,\ 0.24 + 0.14\right) = \left(0.1,\ 0.38\right)$$