UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2018

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.

No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.

No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [2,5 PUNTOS] Analizar el rango de la matriz A según los valores del parámetro *a*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

B. [0,5 PUNTOS] *Utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior*, analizar si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tienen o no tienen solución:

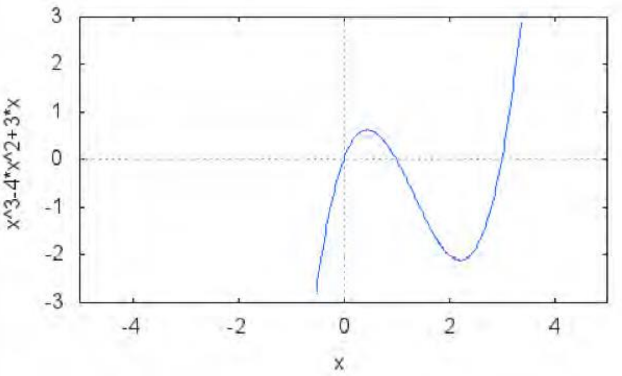
B1. [0,25 PUNTOS] $\begin{cases} x+2y=-1 \\ -3y=1 \\ -2x+2y=4 \end{cases}$ **B2.** [0,25 PUNTOS] $\begin{cases} x+2y=-4 \\ -3y=2 \\ -2x+2y=4 \end{cases}$

C. [0,5 PUNTOS] Resolver los casos compatibles del apartado **B.**

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Un agricultor cultiva árboles frutales. En concreto tiene a su cargo 10 limoneros y cada uno produce 70 frutos. Tiene pensado ampliar el huerto pero ha calculado que por cada nuevo árbol plantado, disminuye en 5 unidades el número de limones producido por cada ejemplar. ¿Cuántos árboles más debería plantar para obtener la producción total máxima?

B. [1,75 PUNTOS] Calcular el área total de la región delimitada por la curva $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje OX:



Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

Una fábrica de botones cuenta con tres máquinas, A, B y C, por las que pasan respectivamente el 45%, el 23% y el 32% de la producción total. El 2% de los botones que pasan por la máquina A salen defectuosos, en el caso de la B es el 1%, y en el de la C el 3%.

Seleccionamos un botón al azar de entre todos los que han salido de la fábrica:

A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

B. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso y haya pasado por la máquina B?

C. [1 PUNTO] Si es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina C?

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]
Un pastelero dispone de 125 kg de harina, 25 kg de azúcar y 30 kg de mantequilla para elaborar dos tipos de tarta: hojaldre y chocolate. Una docena de tartas de hojaldre requiere 2,5 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Para una docena de tartas de chocolate se necesitan 5 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla.
Si el beneficio obtenido de cada docena de tartas de hojaldre es de 15 euros y de cada docena de tartas de chocolate es de 25 euros, ¿con cuántas docenas de cada tipo de dulce se obtendrán los máximos beneficios?

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [2,5 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+4}{3x^2+3x-6} & , \quad x\neq -2 \quad y \quad x\neq 1 \\ ax & , \quad x=-2 \end{cases}$

A1. [1,5 PUNTOS] Determinar los valores del parámetro *a* para los cuales *f(x)* es continua en *x* = –2.
A2. [1 PUNTO] Determinar las asíntotas verticales de *f(x)*. Esbozar la posición de la gráfica de la función respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

B. [1 PUNTO] Dada la función $f(x)=x^3+ax+5$, calcular el valor de *a* para que $\int_{-1}^{3} f(x)dx=60$.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]
La asistencia anual a espectáculos teatrales de los habitantes de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 2. Una muestra aleatoria de 850 personas da como resultado una media de 7 asistencias al año.
A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94 % para la asistencia media anual.
B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97 % sea la mitad del obtenido en el apartado anterior?

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]
A. [2,5 PUNTOS] Analizar el rango de la matriz A según los valores del parámetro *a*.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

B. [0,5 PUNTOS] *Utilizando los resultados obtenidos en el apartado anterior*, analizar si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tienen o no tienen solución:

B1. [0,25 PUNTOS] $\begin{cases} x+2y=-1 \\ -3y=1 \\ -2x+2y=4 \end{cases}$ **B2.** [0,25 PUNTOS] $\begin{cases} x+2y=-4 \\ -3y=2 \\ -2x+2y=4 \end{cases}$

C. [0,5 PUNTOS] Resolver los casos compatibles del apartado **B.**

A. El rango de la matriz A de dimensión 3x3 puede ser 1,2 o 3.

¿El rango de A es 3?

Veamos el valor de su determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -a^2 \\ 0 & -3 & a \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix}=-12-4a+0-\left(-6a^2+0+2a\right)=6a^2-6a-12$$

$$|A|=0 \Rightarrow 6a^2-6a-12=0 \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases} a=\frac{1+3}{2}=2 \\ a=\frac{1-3}{2}=-1 \end{cases}$$

CASO 1. $a\neq -1 \text{ y } a\neq 2$
En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de la matriz A es 3.

CASO 2. $a=-1$
El determinante de A es cero → El rango de A no es 3.
¿El rango de A es 2?

Si a = –1 → $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Extraemos el menor que resulta de quitar en A la fila y columna 3ª.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=-3\neq 0$$

El rango de A es 2.

CASO 3. $a=2$
El determinante de A es cero → El rango de A no es 3.
¿El rango de A es 2?

Si a = 2 → $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Extraemos el menor que resulta de quitar en A la fila y columna 3ª.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

El rango de A es 2.

Conclusión: Para $a \neq -1 \; y \; a \neq 2$ el rango de A es 3. Para a = –1 o a = 2 el rango es 2.

B.

B1. El sistema $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ -3y = 1 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$ tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Esta matriz ampliada es la misma que la del apartado A con a = 1.

Por lo que el rango de A/B es 3. Como el rango de la matriz de coeficientes es 2, entonces el sistema no tiene solución. Es incompatible.

B2. El sistema $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ -3y = 2 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases}$ tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Esta matriz ampliada es la misma que la del apartado A con a = 2. Por lo que el rango de A/B es 2. Como el rango de la matriz de coeficientes es 2 e igual que el número de incógnitas, el sistema tiene solución y es única.

C. Resolvemos el sistema compatible del apartado B2:

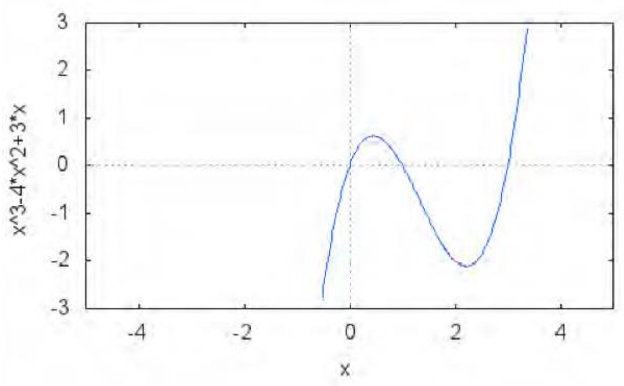
$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ -3y = 2 \\ -2x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -4 \\ \boxed{y = -\frac{2}{3}} \\ -x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2\left(-\frac{2}{3}\right) = -4 \\ -x - \frac{2}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 + \frac{4}{3} = \frac{-8}{3} \\ -x = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \to \boxed{x = -\frac{8}{3}} \end{cases}$$

La solución es $x = -\frac{8}{3}; \quad y = -\frac{2}{3}$

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Un agricultor cultiva árboles frutales. En concreto tiene a su cargo 10 limoneros y cada uno produce 70 frutos. Tiene pensado ampliar el huerto pero ha calculado que por cada nuevo árbol plantado, disminuye en 5 unidades el número de limones producido por cada ejemplar. ¿Cuántos árboles más debería plantar para obtener la producción total máxima?

B. [1,75 PUNTOS] Calcular el área total de la región delimitada por la curva $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ y el eje OX:



A. Hallemos la expresión de la producción (*f(x)*) en función del número de árboles nuevos a plantar (*x*).
Los 10 limoneros que tiene producen 70*10 frutos. Pero si planta x arboles nuevos, la producción disminuye *5x* en cada ejemplar, es decir, la producción es *(10 + x)*(70 – 5x)*.

$$f(x) = (10 + x)(70 - 5x) = 700 - 50x + 70x - 5x^2 = -5x^2 + 20x + 700.$$

Si derivamos para averiguar la producción máxima.

$$f(x) = -5x^2 + 20x + 700 \Rightarrow f'(x) = -10x + 20$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -10x + 20 = 0 \Rightarrow -10x = -20 \Rightarrow x = 2$$

Con la derivada segunda comprobamos si es un máximo.

$$f'(x) = -10x + 20 \Rightarrow f''(x) = -10$$
$$f''(2) = -10 < 0$$

En *x = 2* hay un máximo de *f(x)*. Esto indica que debo plantar 2 árboles más para obtener esa producción máxima.

B. Averigüemos en que puntos la función corta el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 4x^2 + 3x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 4x + 3\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \begin{cases} = \dfrac{4+2}{2} = 3 \\ = \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

La función corta en tres puntos x = 0; x = 1 x = 3. Esta área se divide en dos integrales definidas.

$$\int_0^1 x^3 - 4x^2 + 3x\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{1^4}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0}{3} + \frac{0}{2}\right] = \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{3 - 16 + 18}{12} = \frac{5}{12}$$

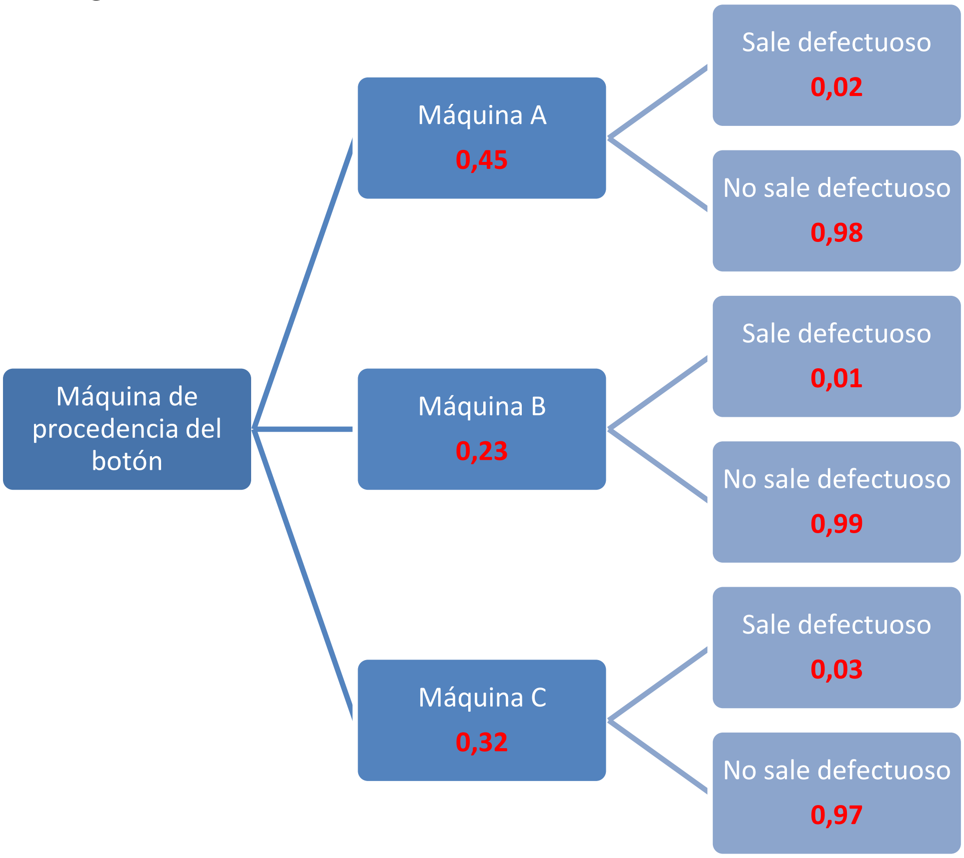
$$\int_1^3 x^3-4x^2+3xdx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_1^3=\left[\frac{3^4}{4}-\frac{4\cdot 27}{3}+\frac{3\cdot 9}{2}\right]-\left[\frac{1^4}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right]=$$

$$=\frac{81}{4}-\frac{108}{3}+\frac{27}{2}-\frac{1}{4}+\frac{4}{3}-\frac{3}{2}=\frac{243-432+162-3+16-18}{12}=\frac{-32}{12}$$

El área es $\left|\int_0^1 x^3-4x^2+3xdx\right|+\left|\int_1^3 x^3-4x^2+3xdx\right|=\frac{5}{12}+\left|-\frac{32}{12}\right|=\frac{5}{12}+\frac{32}{12}=\boxed{\frac{37}{12}u^2}$

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]
Una fábrica de botones cuenta con tres máquinas, A, B y C, por las que pasan respectivamente el 45%, el 23% y el 32% de la producción total. El 2% de los botones que pasan por la máquina A salen defectuosos, en el caso de la B es el 1%, y en el de la C el 3%.
Seleccionamos un botón al azar de entre todos los que han salido de la fábrica:
A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?
B. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso y haya pasado por la máquina B?
C. [1 PUNTO] Si es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya salido de la máquina C?

Construyamos un diagrama de árbol.



A.

$$P(\text{No sale defectuoso})=$$
$$=P(\text{Es de la máquina A})P(\text{No sale defectuoso/Es de la máquina A})+$$
$$+P(\text{Es de la máquina B})P(\text{No sale defectuoso/Es de la máquina B})+$$
$$+P(\text{Es de la máquina C})P(\text{No sale defectuoso/Es de la máquina C})=$$
$$=0,45\cdot 0,98+0,23\cdot 0,99+0,32\cdot 0,97=\boxed{0,9791}$$

B. No se da por hecho nada. Nos piden la probabilidad siguiente:

$$P\left(\text{Pasa por la máquina B y sale defectuoso}\right)=$$

$$=P\left(\text{Es de la máquina B}\right)P\left(\text{Sale defectuoso/Es de la máquina B}\right)=0,23\cdot 0,01=\boxed{0,0023}$$

C. Es una probabilidad a posteriori. Se da por hecho que es defectuoso.

$$P\left(\text{Sea de la máquina C /Es defectuoso}\right)=\frac{P\left(\text{Sea de la máquina C y es defectuoso}\right)}{P\left(\text{Es defectuoso}\right)}=$$

$$=\frac{P\left(\text{Sea de la máquina C}\right)\cdot P\left(\text{Es defectuoso / Es de la máquina C}\right)}{1-P\left(\text{No es defectuoso}\right)}=$$

$$=\frac{0,32\cdot 0,03}{1-0,9791}=\frac{0,0096}{0,0209}=\frac{96}{209}=\boxed{0,4593}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]
Un pastelero dispone de 125 kg de harina, 25 kg de azúcar y 30 kg de mantequilla para elaborar dos tipos de tarta: hojaldre y chocolate. Una docena de tartas de hojaldre requiere 2,5 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Para una docena de tartas de chocolate se necesitan 5 kg de harina, 0,5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla.
Si el beneficio obtenido de cada docena de tartas de hojaldre es de 15 euros y de cada docena de tartas de chocolate es de 25 euros, ¿con cuántas docenas de cada tipo de dulce se obtendrán los máximos beneficios?

Se trata de un problema de programación lineal.
Las variables de decisión son: *x* es el número de docenas de tartas de hojaldre; *y* es el número de docenas de tartas de chocolate.

Con los datos del problema se forma la siguiente tabla:

	Cantidad	Harina	Azúcar	Mantequilla	Beneficio
Número de docenas de tartas de hojaldre	*x*	*2,5x*	*x*	*x*	*15x*
Número de docenas de tartas de chocolate	*y*	*5y*	*0,5y*	*y*	*25y*

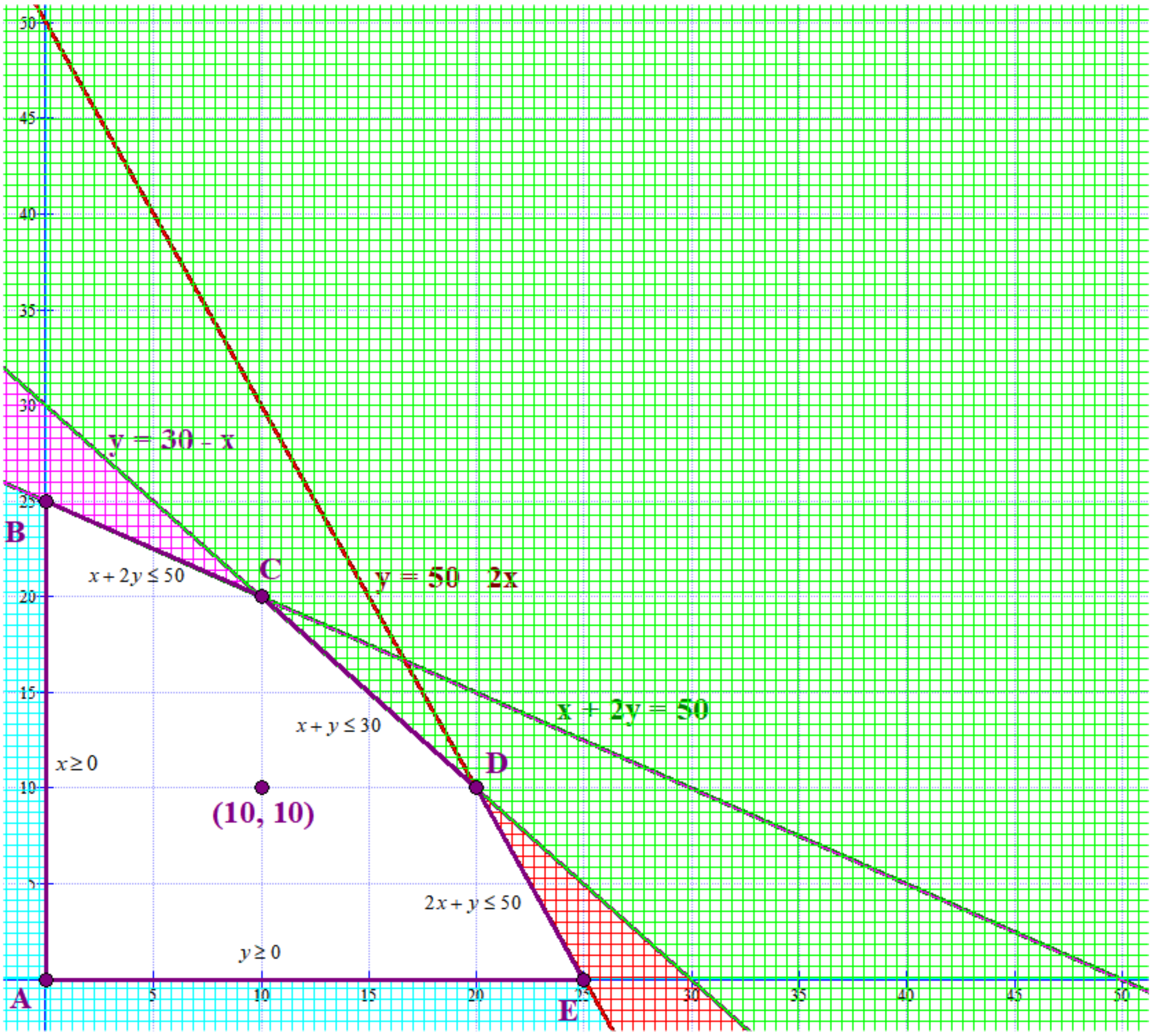
La función beneficio es $B(x,y)=15x+25y$.

Las restricciones del problema son:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 2,5x+5y\leq 125 \\ x+0,5y\leq 25 \\ x+y\leq 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x+2y\leq 50 \\ 2x+y\leq 50 \\ x+y\leq 30 \end{array}\right\}$$

Representamos las rectas asociadas:

$$\begin{array}{c|c} x & y=\dfrac{50-x}{2} \\ \hline 0 & 25 \\ 50 & 0 \\ 10 & 20 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} x & y=50-2x \\ \hline 0 & 50 \\ 25 & 0 \\ 20 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} x & y=30-x \\ \hline 0 & 30 \\ 30 & 0 \\ 20 & 10 \end{array}$$



Probamos el punto (10, 10) y cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \geq 0 \\ 10 \geq 0 \\ 10+20 \leq 50 \\ 20+10 \leq 50 \\ 10+10 \leq 30 \end{array}\right\}$$

La región factible es la zona blanca del dibujo.

Averiguamos las coordenadas de los vértices y valoramos el beneficio en cada uno de ellos.
A(0, 0); B(0, 25); C(10, 20); D(20, 10); E(25, 0).

$$A(0,\ 0) \Rightarrow B(0,0) = 0+0 = 0$$

$$B(0,\ 25) \Rightarrow B(0,25) = 0+625 = 625$$

$$C(10,\ 20) \Rightarrow B(10,20) = 150+500 = 650$$

$$D(20,\ 10) \Rightarrow B(20,10) = 300+250 = 550$$

$$E(25,\ 0) \Rightarrow B(25,0) = 375+0 = 375$$

El beneficio máximo se produce en C(10, 20). Hay que hacer 10 docenas de tartas de hojaldre y 20 de chocolate para obtener el máximo beneficio, siendo este de 650 €.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [2,5 PUNTOS] Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+4}{3x^2+3x-6} & , \quad x\neq -2 \quad y \quad x\neq 1\\ ax & , \quad x=-2\end{cases}$

A1. [1,5 PUNTOS] Determinar los valores del parámetro *a* para los cuales *f(x)* es continua en *x* = –2.
A2. [1 PUNTO] Determinar las asíntotas verticales de *f(x)*. Esbozar la posición de la gráfica de la función respecto a dichas asíntotas, calculando previamente los límites laterales correspondientes.

B. [1 PUNTO] Dada la función $f(x)=x^3+ax+5$, calcular el valor de *a* para que $\int_{-1}^{3} f(x)dx=60$.

A1. Para que sea continua en x = –2 debe cumplirse:

1. Existe $f(-2)=a(-2)=-2a$.
2. Existe el límite de la función cuando x se acerca a –2.

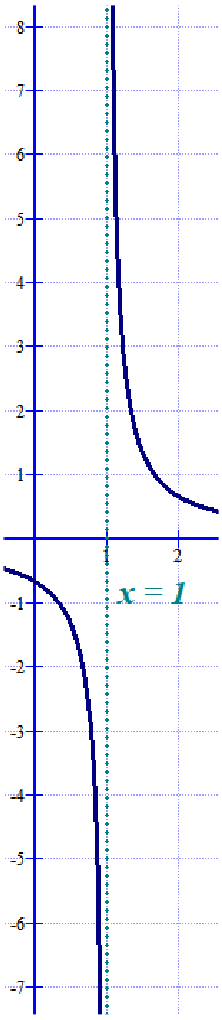
$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{2x+4}{3x^2+3x-6}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}=$$

$2x+4=2(x+2)$ y también
$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & -6\\ -2 & & -6 & 6\\ \hline & 3 & -3 & \boxed{0}\end{array}\Rightarrow 3x^2+3x-6=(3x-3)(x+2)$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{2\cancel{(x+2)}}{(3x-3)\cancel{(x+2)}}=\lim_{x\to -2}\frac{2}{3x-3}=\frac{2}{-9}$$

3. Deben ser iguales $f(-2)=\lim_{x\to -2} f(x)\Rightarrow -2a=\frac{2}{-9}\Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{9}}$

A2.



Asíntota vertical. $x=a$

Para ello igualamos a cero el denominador, para localizar los valores de x para los que no existe la función.

$$3x^2+3x-6=0\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+72}}{6}=\frac{-3\pm 9}{6}=\begin{cases}=\dfrac{-3+9}{6}=1\\[2mm] =\dfrac{-3-9}{6}=-2\end{cases}$$

En estos dos valores podría haber asíntota vertical, pero hemos comprobado que $\lim_{x\to -2} f(x)=-\frac{2}{9}$, por lo que no hay asíntota en x = –2.

Sin embargo $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x+4}{3x^2+3x-6}=\frac{6}{0}=\infty$

La asíntota vertical es $x=1$

Comportamiento de la función en el entorno de la asíntota:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+4}{3x^2+3x-6}=\frac{6(\text{valores positivos})}{0(\text{valores positivos})}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x+4}{3x^2+3x-6}=\frac{6(\text{valores positivos})}{0(\text{valores negativos})}=-\infty$$

Asíntota horizontal. $\underline{y=b}$

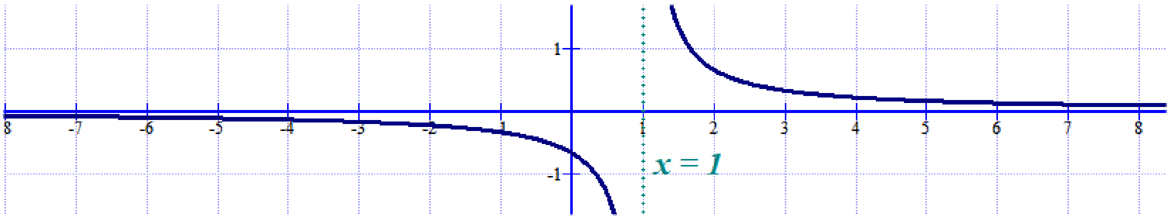
$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{3x^2+3x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cancel{x}}{3x^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x}=\frac{2}{\infty}=0$$

La asíntota horizontal es $y=0$

Comportamiento de la función en el entorno de la asíntota:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{3x^2+3x-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}}{3x^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3x}=\frac{2}{+\infty}=0$ Se acerca con valores positivos, es decir superiores a y = 0.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{3x^2+3x-6}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\cancel{x}}{3x^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3x}=\frac{2}{-\infty}=0$ Se acerca con valores negativos, es decir inferiores a y = 0.



Asíntota oblicua. $\underline{y=mx+n}$

No tiene pues tiene asíntota horizontal.

C. Calculemos la integral definida.

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx=\int_{-1}^{3} x^3+ax+5dx=\left[\frac{x^4}{4}+a\frac{x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{3}=\left[\frac{3^4}{4}+a\frac{3^2}{2}+15\right]-\left[\frac{(-1)^4}{4}+a\frac{(-1)^2}{2}-5\right]=$$

$$=\frac{81}{4}+\frac{9}{2}a+15-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}a+5=\frac{80}{4}+20+\frac{8}{2}a=40+4a$$

Como $\int_{-1}^{3} f(x)dx=60\Rightarrow 40+4a=60\Rightarrow 4a=20\Rightarrow \boxed{a=5}$

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]
La asistencia anual a espectáculos teatrales de los habitantes de una gran ciudad sigue una distribución normal con desviación típica 2. Una muestra aleatoria de 850 personas da como resultado una media de 7 asistencias al año.
A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 94 % para la asistencia media anual.
B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 97 % sea la mitad del obtenido en el apartado anterior?

X = Número de veces que va al teatro una persona durante un año. X = N(μ, 2)

El tamaño de la muestra es n = 850 y la media obtenida en la muestra es $\bar{x} = 7$.

A. Si el nivel de confianza es del 94% hallamos el error asociado.

$$1-\alpha = 0,94 \to \alpha = 0,06 \to \frac{\alpha}{2} = 0,03 \to 1-\frac{\alpha}{2} = 0,97 \to \left\{ \begin{array}{c} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la N(0,1)} \end{array} \right\} \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,88$$

El error es $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,88 \cdot \frac{2}{\sqrt{850}} = 0,12896...$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(7 - 0.129, 7 + 0,129\right) = \left(6.871, 7.129\right)$$

B.

La mitad del error del apartado anterior es $Error = \frac{0,129}{2} = 0,0645$

Si el nivel de confianza es del 97% hallamos el error asociado.

$$1-\alpha = 0,97 \to \alpha = 0,03 \to \frac{\alpha}{2} = 0,015 \to 1-\frac{\alpha}{2} = 0,985 \to \left\{ \begin{array}{c} \text{Busco en la tabla} \\ \text{de la N(0,1)} \end{array} \right\} \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$$

El error debe ser 0,0645 y con la fórmula es Error = $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,17 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{4,34}{\sqrt{n}}$

$$\frac{4,34}{\sqrt{n}} = 0,0645 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{4,34}{0,0645} \Rightarrow n = \left(\frac{4,34}{0,0645}\right)^2 = 4527,51$$

El tamaño de la muestra debe ser un mínimo de 4528 personas.