UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2017

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.

No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.

No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]
Una frutería quiere dar salida esta semana a 50 kg de manzanas y 27 kg de naranjas que le han quedado por vender. Para ello prepara dos tipos de cajas: A y B. Cada caja del tipo A contiene 5 kg de manzanas y 2 kg de naranjas. Y cada caja del tipo B, 5 kg de manzanas y 3 kg de naranjas. El precio de venta de cada caja A es de 7,5 euros, y el precio de venta de cada caja B es de 8,5 euros ¿Cuántas cajas de cada tipo debe vender para maximizar sus ingresos?

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]
Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$:
A. [0,1 PUNTOS] Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
C. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
D. [0,5 PUNTOS] Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = 4x$.
E. [1,7 PUNTOS] Calcular el área de la región anterior.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]
Las probabilidades de que tres tiradores con arco consigan hacer diana son, respectivamente, 3/5, 2/3 y 5/6. Si los tres disparan simultáneamente:
A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en el blanco uno solo?
B. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que los tres acierten?
C. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos uno de ellos?

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]

A. [3 PUNTOS] Una empresa elabora dos modelos de un determinado producto. Un empleado necesita dos minutos para cada unidad del primer modelo y cuatro para cada unidad del segundo. Los costes unitarios de producción de cada modelo son de 4 y 6 euros respectivamente. Por otro lado, el número de unidades del primer modelo debe ser diariamente el doble que el número de unidades del segundo modelo. El sistema de ecuaciones lineales para calcular el número de unidades de cada modelo que puede acabar un empleado en una jornada de 8 horas si se invierten *k* euros diarios de presupuesto, es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x+4y=480 \\ 4x+6y=k \\ x-2y=0 \end{cases}$$

Determinar, según el presupuesto disponible (según los valores del parámetro *k*), los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución. Resuelve los casos en los que el sistema tenga solución.

B. [0,5 PUNTOS] Dada la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & 840 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Tiene inversa? Justifica la respuesta basándote únicamente en los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]

A. [1,75 PUNTOS] Durante el anterior periodo de rebajas, una tienda ofreció un artículo a 50 euros la unidad y las ventas fueron de 20 unidades. Un estudio revela que por cada euro que disminuya el precio en las próximas rebajas, conseguirá vender 4 unidades más. Por otro lado, la tienda ha asumido un coste de 35 euros por cada unidad del producto. ¿Qué precio de venta por unidad debe fijar para maximizar los beneficios obtenidos durante el nuevo periodo de rebajas?

B. [1,75 PUNTOS] Dada la función

$$f(\mathrm{x})=\begin{cases} ax^2+5x-2, & si \quad x\le -1 \\ \dfrac{x+3}{x^2+5}, & si \quad -1<x\le 7 \\ \dfrac{bx+1}{(x-5)^2}, & si \quad 7<x \end{cases}$$

determinar los valores de los parámetros *a* y *b* para los cuales es continua en *x* = –1 y *x* = 7.

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]

El sueldo mensual de los trabajadores de una empresa sigue una distribución normal con desviación típica de 310 euros. Una muestra aleatoria de 1200 personas da como resultado un sueldo medio de 1545 euros.

A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 97 % para el sueldo medio mensual.

B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea la mitad del obtenido en el apartado anterior?

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]
Una frutería quiere dar salida esta semana a 50 kg de manzanas y 27 kg de naranjas que le han quedado por vender. Para ello prepara dos tipos de cajas: A y B. Cada caja del tipo A contiene 5 kg de manzanas y 2 kg de naranjas. Y cada caja del tipo B, 5 kg de manzanas y 3 kg de naranjas. El precio de venta de cada caja A es de 7,5 euros, y el precio de venta de cada caja B es de 8,5 euros ¿Cuántas cajas de cada tipo debe vender para maximizar sus ingresos?

Las variables de decisión son: *x* número de cajas de tipo *A* *y* número de cajas de tipo *B*
Con los datos del problema se forma la siguiente tabla:

	Kg de manzanas	Kg de naranjas	Ingresos
Caja tipo A (x)	**5x**	**2x**	**7,5x**
Caja tipo B (y)	**5y**	**3y**	**8,5y**
Total	**5x + 5y**	**2x + 3y**	**7,5x + 8,5y**

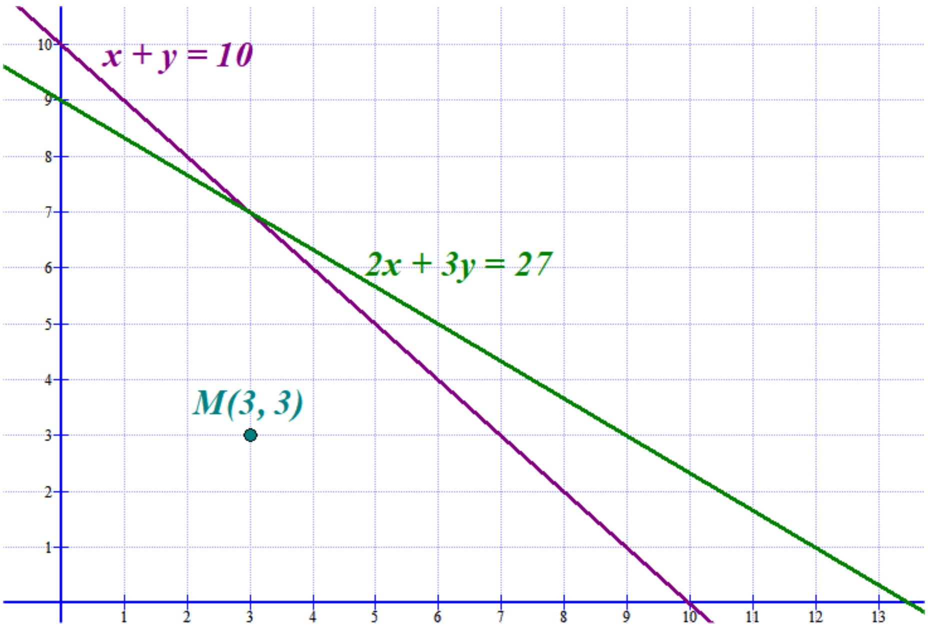
La función a maximizar es $f(x,y)=7,5x+8,5y$.
Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 5x+5y\leq 50 \\ 2x+3y\leq 27 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones.

$$5x+5y=50 \Rightarrow x+y=10 \Rightarrow y=10-x \qquad \begin{array}{c|c} x & y=10-x \\ \hline 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{array}$$

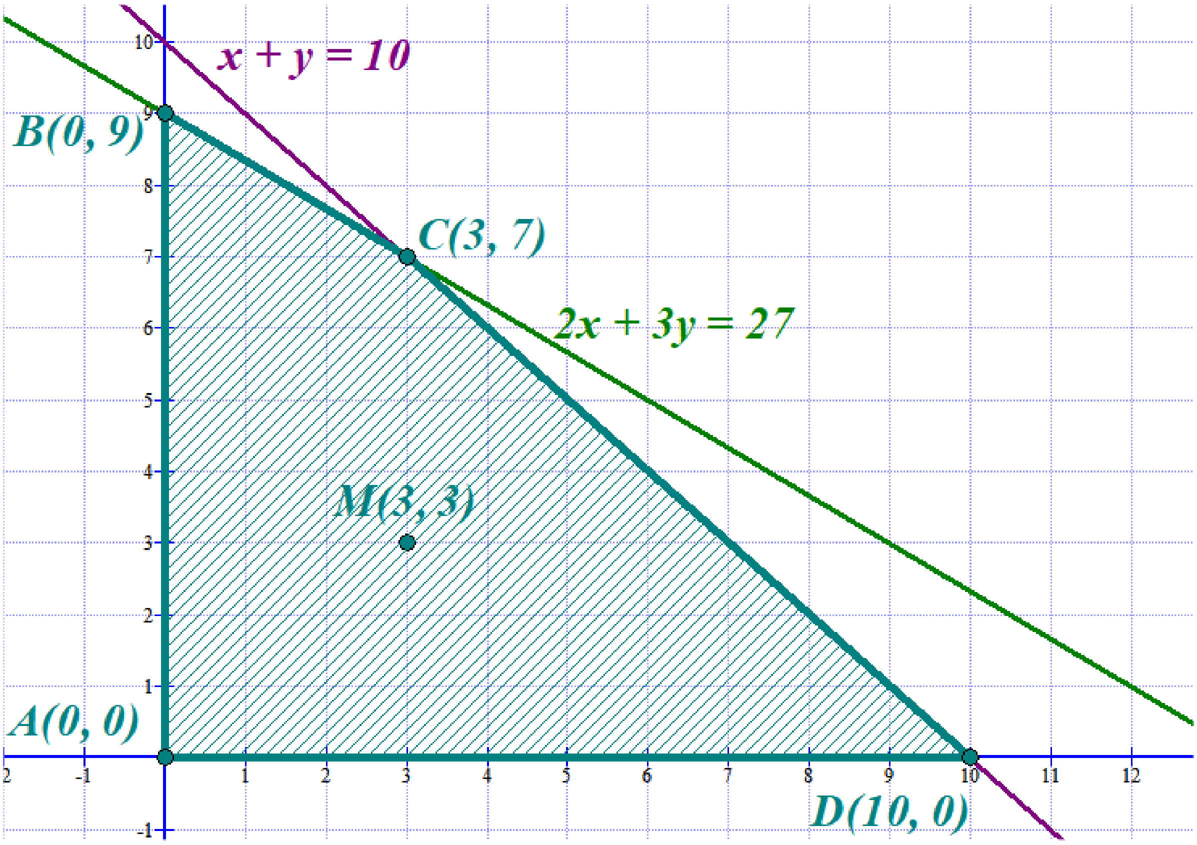
$$2x+3y=27 \Rightarrow 3y=27-2x \Rightarrow y=\frac{27-2x}{3} \qquad \begin{array}{c|c} x & y=\dfrac{27-2x}{3} \\ \hline 0 & 9 \\ 9 & 3 \end{array}$$



Probamos si el punto M(3, 3) cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3 \geq 0 \\ 3 \geq 0 \\ 15+15 \leq 50 \\ 6+9 \leq 27 \end{array}\right\} \text{Si las cumple}$$

La región factible es la delimitada por los ejes de coordenadas y las dos rectas que contiene al punto M.



Calculamos el valor de la función a maximizar en cada uno de los vértices de la región.

A(0, 0) → $f(0,0)=0$

B(9, 0) → $f(9,0)=67,5+0=67,5$

C(3, 7) → $f(3,7)=22,5+59,5=82$

D(10, 0) → $f(10,0)=75+0=75$

Los máximos ingresos se obtienen en el punto C(3, 7) que significa hacer 3 cajas tipo A y 7 del tipo B.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]
Dada la función $f(x)=x^3+x^2-2x$:

A. [0,1 PUNTOS] Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
C. [0,6 PUNTOS] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
D. [0,5 PUNTOS] Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = 4x$.
E. [1,7 PUNTOS] Calcular el área de la región anterior.

A. Puntos de corte con eje OX (y = 0):

$$f(x)=0 \Rightarrow x^3+x^2-2x=0 \Rightarrow x\left(x^2+x-2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^2+x-2=0 \end{cases}$$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} \boxed{x=\frac{-1+3}{2}=1} \\ \boxed{x=\frac{-1-3}{2}=-2} \end{cases}$$

Los puntos de corte con OX son A(0, 0), B(1, 0) y C(–2, 0)

Puntos de corte con eje OY (x = 0):

$$f(0)=0^3+0^2-0=0$$

El punto de corte con el eje OY es A(0, 0)

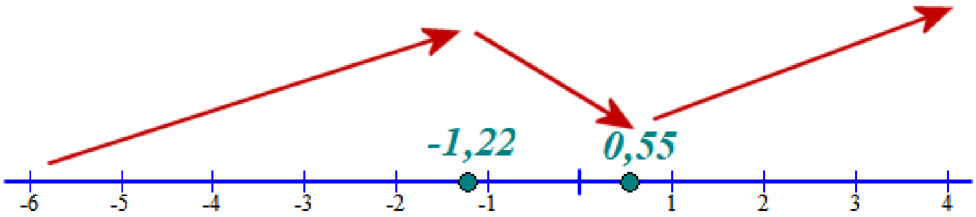
B. Usaremos la derivada de la función:

$$f(x)=x^3+x^2-2x \Rightarrow f'(x)=3x^2+2x-2$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+2x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+24}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{6}=\begin{cases} x=\frac{-2+\sqrt{28}}{6}=0,55 \\ x=\frac{-2-\sqrt{28}}{6}=-1,22 \end{cases}$$

El dominio de la función ($\mathbb{R}$)se divide en 3 intervalos o semirrectas.

- En la semirrecta $(-\infty,-1,22)$. Tomamos x = –2 y la derivada vale $f'(-2)=3(-2)^2+2(-2)-2=12-4-2=6>0$. La función crece.
- En el intervalo $(-1,22,\ 0,55)$. Tomamos x = 0 y la derivada vale $f'(0)=0+0-2=-2<0$. La función decrece.
- En la semirrecta $(0,55,+\infty)$. Tomamos x = 2 y la derivada vale $f'(2)=3\cdot 2^2+4-2=14>0$. La función crece.



La función crece en los intervalos $(-\infty,-1,22)\cup(0,55,+\infty)$ y decrece en $(-1,22,\,0,55)$.
La función presenta un máximo local en x = –1,22 y un mínimo local en x = 0,55.

C. Usamos la derivada segunda.

$$f\,'(x)=3x^2+2x-2 \Rightarrow f\,''(x)=6x+2$$

$$f\,''(x)=0 \Rightarrow 6x+2=0 \Rightarrow x=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$

- En el intervalo $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$ tomamos x = –2 y la derivada segunda vale $f\,''(-2)=-12+2=-10<0$. La función es cóncava ($\cap$).
- En el intervalo $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$ tomamos x = 0 y la derivada segunda vale $f\,''(0)=2>0$. La función es convexa ($\cup$).

En el punto de abscisa $x=-\frac{1}{3}$ existe un punto de inflexión. Siendo cóncava en $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$ y convexa en $\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

D. Determinemos los posibles puntos de corte de recta y función:

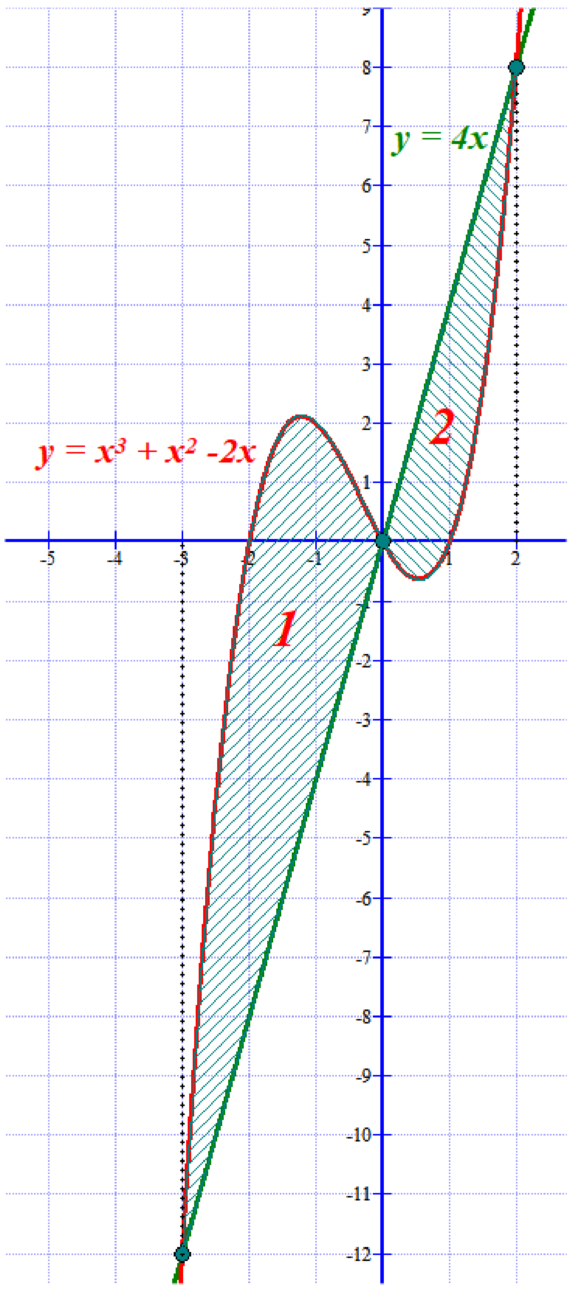
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+x^2-2x \\ y=4x \end{array}\right\} \Rightarrow x^3+x^2-2x=4x \Rightarrow x^3+x^2-6x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(x^2+x-6\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\dfrac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{-1+5}{2}=2 \\ x=\dfrac{-1-5}{2}=-3 \end{cases} \end{cases}$$

Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la función y la recta.

x	$y=x^3+x^2-2x$
0	0
1	0
2	$8+4-4=8$
-3	$-27+9+6=-12$

x	$y=4x$
0	0
1	4
2	8
-3	-12



E. Al tener tres puntos de corte el área de la región es la suma del valor absoluto de dos integrales definidas (región 1 + región 2).

$$\text{Área región 1} + \text{Área región 2} = \int_{-3}^{0} x^3+x^2-2x-4x\,dx + \int_{0}^{2} 4x-\left(x^3+x^2-2x\right)dx =$$

$$= \int_{-3}^{0} x^3+x^2-6x\,dx + \int_{0}^{2} -x^3-x^2+6x\,dx = \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-3x^2\right]_{-3}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left[\frac{0^4}{4}+\frac{0^3}{3}-0\right] - \left[\frac{(-3)^4}{4}+\frac{(-3)^3}{3}-3(-3)^2\right] + \left[-\frac{2^4}{4}-\frac{2^3}{3}+12\right] - \left[-\frac{0^4}{4}-\frac{0^3}{3}+0\right] =$$

$$= -\left(\frac{81}{4}-9-27\right)-4-\frac{8}{3}+12 = -\frac{81}{4}+36+8-\frac{8}{3} = \boxed{\frac{253}{12} = 21,08\,u^2}$$

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]
Las probabilidades de que tres tiradores con arco consigan hacer diana son, respectivamente, 3/5, 2/3 y 5/6. Si los tres disparan simultáneamente:
A. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que acierte en el blanco uno solo?
B. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que los tres acierten?
C. [1 PUNTO] ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos uno de ellos?

Llamemos a los tiradores 1º, 2º y 3º.

La probabilidad de acertar el 1º es 3/5 y de fallar es 2/5.
La probabilidad de acertar el 2º es 2/3 y de fallar es 1/3.
La probabilidad de acertar el 3º es 5/6 y de fallar es 1/6.

A.

$$P(\text{Acierta solo uno de los tiradores}) =$$
$$= P(\text{Acierta el 1º de los tiradores})P(\text{Falla el 2º de los tiradores})P(\text{Falla el 3º de los tiradores}) +$$
$$+P(\text{Falla el 1º de los tiradores})P(\text{Acierta el 2º de los tiradores})P(\text{Falla el 3º de los tiradores}) +$$
$$+P(\text{Falla el 1º de los tiradores})P(\text{Falla el 2º de los tiradores})P(\text{Acierta el 3º de los tiradores}) =$$
$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{3+4+10}{90} = \boxed{\frac{17}{90} = 0{,}188}$$

B.

$$P(\text{Aciertan los 3 tiradores}) =$$
$$= P(\text{Acierta el tirador 1º})P(\text{Acierta el tirador 2º})P(\text{Acierta el tirador 3º}) =$$
$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6} = \frac{30}{90} = \boxed{\frac{1}{3} = 0{,}33}$$

C.

$$P(\text{Acierte al menos uno de ellos}) = 1 - P(\text{Fallan los 3 tiradores}) =$$
$$= 1 - P(\text{Falla el tirador 1º})P(\text{Falla el tirador 2º})P(\text{Falla el tirador 3º}) =$$
$$= 1 - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} = 1 - \frac{2}{90} = \boxed{\frac{88}{90} = 0{,}977}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1 [3,5 PUNTOS]
A. [3 PUNTOS] Una empresa elabora dos modelos de un determinado producto. Un empleado necesita dos minutos para cada unidad del primer modelo y cuatro para cada unidad del segundo. Los costes unitarios de producción de cada modelo son de 4 y 6 euros respectivamente. Por otro lado, el número de unidades del primer modelo debe ser diariamente el doble que el número de unidades del segundo modelo. El sistema de ecuaciones lineales para calcular el número de unidades de cada modelo que puede acabar un empleado en una jornada de 8 horas si se invierten *k* euros diarios de presupuesto, es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x+4y=480 \\ 4x+6y=k \\ x-2y=0 \end{cases}$$

Determinar, según el presupuesto disponible (según los valores del parámetro *k*), los casos en los que el siguiente sistema tiene o no tiene solución. Resuelve los casos en los que el sistema tenga solución.

B. [0,5 PUNTOS] Dada la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & 840 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Tiene inversa? Justifica la respuesta basándote únicamente en los resultados obtenidos en el apartado anterior.

A. Para discutir el sistema consideramos las matrices asociadas y utilizando el teorema de Rouche-Frobenius decidimos su compatibilidad.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A/B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & k \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 ya que el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 3ª es no nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12-16=-4\neq 0$$

El rango de A/B puede ser 3. Calculemos su determinante.

$$|A/B|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & k \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4k-3840-(2880-4k)=8k-6720$$

Igualamos a cero el determinante.

$$|A/B|=0 \Rightarrow 8k-6720=0 \Rightarrow k=\frac{6720}{8}=840$$

Hay dos casos distintos. Veamos que ocurre en cada uno de ellos.

CASO 1. $k\neq 840$

En este caso el determinante de la matriz ampliada es no nulo y por tanto su rango es 3. El rango de A es 2. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible. No tiene solución.

CASO 2. $k=840$

En este caso el determinante de la matriz ampliada es nulo y el rango de la matriz ampliada es 2 como el de la matriz de los coeficientes. Y también es igual al número de incógnitas (2). El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

Pide resolverlo en este caso. El sistema queda:

$$\begin{cases} 2x+4y=480 \\ 4x+6y=840 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y=480 \\ 4x+6y=840 \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y+4y=480 \\ 8y+6y=840 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y=480 \\ 14y=840 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{480}{8}=60 \\ y=\frac{840}{14}=60 \end{cases}$$

$$\boxed{y=60 \Rightarrow x=120}$$

Para k = 840 el empleado puede acabar 120 unidades del primer modelo y 60 del segundo.

B. La matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 480 \\ 4 & 6 & 840 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz ampliada A/B del apartado anterior (en el caso 2) y ya hemos comprobado que su determinante es nulo, por lo que no tiene inversa.

Ejercicio 2 [3,5 PUNTOS]
A. [1,75 PUNTOS] Durante el anterior periodo de rebajas, una tienda ofreció un artículo a 50 euros la unidad y las ventas fueron de 20 unidades. Un estudio revela que por cada euro que disminuya el precio en las próximas rebajas, conseguirá vender 4 unidades más. Por otro lado, la tienda ha asumido un coste de 35 euros por cada unidad del producto. ¿Qué precio de venta por unidad debe fijar para maximizar los beneficios obtenidos durante el nuevo periodo de rebajas?

B. [1,75 PUNTOS] Dada la función

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} ax^2+5x-2, & si \quad x \le -1 \\ \dfrac{x+3}{x^2+5}, & si \quad -1 < x \le 7 \\ \dfrac{bx+1}{(x-5)^2}, & si \quad 7 < x \end{cases}$$

determinar los valores de los parámetros *a* y *b* para los cuales es continua en *x* = –1 y *x* = 7.

A. Llamemos x al número de euros que baja el precio del artículo.
Si vendo a 50 euros el beneficio que consigue por cada artículo es 50 –35 = 15.
Si descuento x euros el nuevo beneficio es 15 – x.
Al hacer este descuento de x euros vendo 20 + 4x unidades.

El beneficio es una función de x:

$$f(x) = (15-x)(20+4x)$$

Para hallar con que descuento se obtiene el máximo beneficio, derivo esta función y la igualo a cero.

$$f(x) = (15-x)(20+4x) = 300+60x-20x-4x^2 = -4x^2+40x+300$$

$$f\,'(x) = -8x+40$$

$$f\,'(x) = 0 \Rightarrow -8x+40 = 0 \Rightarrow x = \frac{40}{8} = 5$$

Como $f\,'(x) = -8x+40 \Rightarrow f\,''(x) = -8 \Rightarrow f\,''(5) = -8 < 0$
Para x = 5 la función tiene un máximo.

Con el descuento de 5 € se consigue un máximo beneficio. Es decir el precio debe ser de 45 € por artículo.

B.

Estudiemos la continuidad de la función $f(\mathrm{x}) = \begin{cases} ax^2+5x-2, & si \quad x \le -1 \\ \dfrac{x+3}{x^2+5}, & si \quad -1 < x \le 7 \\ \dfrac{bx+1}{(x-5)^2}, & si \quad 7 < x \end{cases}$ en x = –1

- Existe $f(-1) = a-5-2 = a-7$
- Existe $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} ax^2+5x-2 = a-7$
- Existe $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x+3}{x^2+5} = \dfrac{-1+3}{1+5} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

- Los tres valores son iguales → $a-7=\frac{1}{3}\Rightarrow \boxed{a=7+\frac{1}{3}=\frac{22}{3}}$

Estudiemos la continuidad de la función $f(\mathrm{x})=\begin{cases} ax^2+5x-2, & si \quad x\leq -1 \\ \frac{x+3}{x^2+5}, & si \quad -1<x\leq 7 \\ \frac{bx+1}{(x-5)^2}, & si \quad 7<x \end{cases}$ en x = 7

- Existe $f(7)=\frac{7+3}{7^2+5}=\frac{10}{54}=\frac{5}{27}$
- Existe $\lim_{x\to 7^-} f(x)=\lim_{x\to 7^-}\frac{x+3}{x^2+5}=\frac{5}{27}$
- Existe $\lim_{x\to 7^+} f(x)=\lim_{x\to 7^+}\frac{bx+1}{(x-5)^2}=\frac{7b+1}{4}$
- Los tres valores son iguales →
  $\frac{7b+1}{4}=\frac{5}{27}\Rightarrow 189b+27=20\Rightarrow 189b=-7\Rightarrow \boxed{b=\frac{-7}{189}=\frac{-1}{27}}$

Los valores buscados son $a=\frac{22}{3} \quad y \quad b=\frac{-1}{27}$

Ejercicio 3 [3 PUNTOS]
El sueldo mensual de los trabajadores de una empresa sigue una distribución normal con desviación típica de 310 euros. Una muestra aleatoria de 1200 personas da como resultado un sueldo medio de 1545 euros.
A. [1,5 PUNTOS] Obtener el intervalo de confianza del 97 % para el sueldo medio mensual.
B. [1,5 PUNTOS] ¿Cuál es el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido al estimar la media con un nivel de confianza del 98 % sea la mitad del obtenido en el apartado anterior?

Llamemos X = Sueldo mensual de un trabajador. X = N(μ, 310)

A. $\bar{x} = 1545$ €; $n = 1200$

Con el nivel de confianza del 97% significa que

$1 - \alpha = 0,97 \to \alpha = 0,03 \to \alpha/2 = 0'015 \to 1 - \alpha/2 = 0,985 \to z_{\alpha/2} = \mathbf{2,17}$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(1545 - 2,17 \cdot \frac{310}{\sqrt{1200}}, 1545 + 2,17 \cdot \frac{310}{\sqrt{1200}}\right)$$

El intervalo de confianza es $(1525'58, 1564'42)$

B. Para un nivel de confianza del 98% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0,98 \to \alpha = 0,02 \to \alpha/2 = 0'01 \to 1 - \alpha/2 = 0,99 \to z_{\alpha/2} = \mathbf{2,325}$

Como el error anterior era de $2,17 \cdot \frac{310}{\sqrt{1200}} = 19,42$. La mitad es 9,71 € entonces:

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9,71 \Rightarrow 2,17 \cdot \frac{310}{\sqrt{n}} = 9,71 \Rightarrow 2,17 \cdot \frac{310}{9,71} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(2,17 \cdot \frac{310}{9,71}\right)^2 = 5533,45$$

El tamaño mínimo de la muestra es 5534 trabajadores.