UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2022

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES

1. Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución.
4. Todas las respuestas deben ser razonadas. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro t.

$$\begin{cases} tx+y-2z=0 \\ x+y-tz=-1 \\ x+y+z=t \end{cases}$$

A. [1 PUNTO] Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única. Resuélvalo para $t=0$ si es posible.
B. [1 PUNTO] Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

C. [0,5 PUNTOS] Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Una imprenta debe diseñar un cartel con 90 cm2 de área para texto y además, con margen superior 3 cm, inferior 2 cm y márgenes laterales 4 cm cada uno.
A. [0,25 PUNTOS] Realice un dibujo planteando el problema.
B. [2,25 PUNTOS] Calcule las dimensiones (anchura y altura) que debe tener el cartel de manera que se utilice la menor cantidad de papel posible.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Considere el triángulo de vértices A = (–1,2,3), B = (3,–4,1), C = (1,–4,5).
A. [1,5 PUNTOS] Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC.

B. [1 PUNTO] Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

En un almacén, el peso de los contenedores sigue una distribución normal con media 100 kg y desviación típica 10 kg. Cada contenedor se carga individualmente en un montacargas, que tiene una capacidad de 120 kg. Si el peso del contenedor supera dicha capacidad, salta una alarma.
Se coloca en el montacargas un contenedor escogido al azar.
A. [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que salte la alarma.
B. [1,25 PUNTOS] Calcule cuál debería ser la capacidad del montacargas para que la alarma salte solo en un 1 % de las veces que cargamos un contenedor al azar.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A. [0,5 PUNTOS] Compruebe que las matrices A y B son regulares.
B. [0,5 PUNTOS] Calcule las matrices inversas de A y B.
C. [0,75 PUNTOS] Despeje X en la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$ en donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

D. [0,75 PUNTOS] Calcule X.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]
Considere la función $f(x) = x^2 e^{-x}$.

A. [1 PUNTO] Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

B. [0,5 PUNTOS] Calcule la derivada primera de *f(x)*.
C. [0,5 PUNTOS] Determine los extremos relativos de *f(x)*.

D. [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Los puntos A = (2, 0, 0), B = (–1, 12, 4) son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$

A. [1,5 PUNTOS] Calcule las coordenadas del tercer vértice C, sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y C.

B. [0,5 PUNTOS] Determine el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

C. [0,5 PUNTOS] Calcule el área del triángulo ABC.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En una urna hay 4 bolas, una de ellas es blanca y las otras tres negras. Sacamos una bola al azar y sin devolverla a la urna sacamos una segunda bola también al azar.
A. [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.
B. [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.
C. [0,5 PUNTOS] Calcule la probabilidad de sacar una bola negra en la segunda extracción, si sabemos que la primera bola fue negra.

SOLUCIONES

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]
Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro t.

$$\begin{cases} tx+y-2z=0 \\ x+y-tz=-1 \\ x+y+z=t \end{cases}$$

A. [1 PUNTO] Determine para qué valores de t el sistema tiene solución única. Resuélvalo para $t=0$ si es posible.
B. [1 PUNTO] Determine para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
C. [0,5 PUNTOS] Determine para qué valores de t el sistema no tiene solución.

A. Averiguamos cuando la matriz de coeficientes no se anula.

$$A=\begin{pmatrix} t & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} t & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -t \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=t-t-2+2-1+t^2=t^2-1$$

$$|A|=0 \Rightarrow t^2-1=0 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow t=\sqrt{1}=\pm 1$$

Cuando $t \neq -1$ y $t \neq 1$ el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema tiene solución única.

Para t = 0 estamos en un sistema con solución única.

$$\begin{cases} y-2z=0 \\ x+y=-1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2z \\ x+y=-1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2z=-1 \\ x+2z+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2z \\ x+3z=0 \end{cases} \Rightarrow -1-2z+3z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1+z=0 \Rightarrow \boxed{z=1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=-1-2=-3} \\ \boxed{y=2} \end{cases}$$

La solución es *x = –3, y = 2, z = 1.*

B. Para t = –1 tenemos que el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Utilizamos Gauss para averiguar el rango de A y de A/B.

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2ª + Fila 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -1 & -1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3}^{\text{a}}+\text{Fila 1}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -2 & 0\\ \hline 0 & 2 & -1 & -1\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila 3}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3}^{\text{a}}-\text{Fila 2}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila 3}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, el rango de A/B es 2 y el número de incógnitas es 3. El sistema tiene infinitas soluciones.
Lo resolvemos a partir de la matriz equivalente obtenida.

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-x+y-2z=0\\ 2y-z=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-x+y-2z=0\\ \boxed{z=1+2y}\end{array}\right\}\Rightarrow -x+y-2(1+2y)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+y-2-4y=0\Rightarrow -x-3y-2=0\Rightarrow \boxed{x=-2-3y}$$

$$\boxed{\textit{Solución}:\begin{cases}x=-2-3t\\ y=t\\ z=1+2t\end{cases}}$$

C. Para t = 1 tenemos que el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Utilizamos Gauss para averiguar el rango de A y de A/B.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 2}^{\text{a}}-\text{Fila 1}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 2 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila 2}^{\text{a}}\end{array}\right\}$$

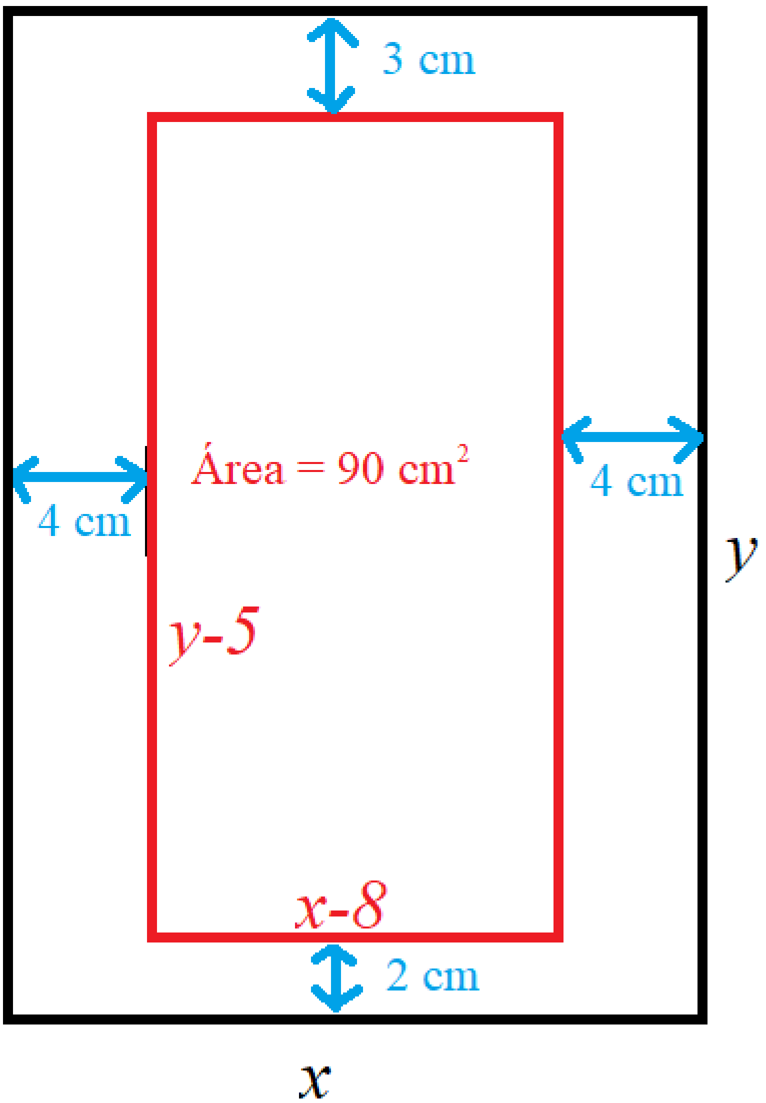
$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3}^{\text{a}}-\text{Fila 1}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2 & 0\\ \hline 0 & 0 & 3 & 1\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila 3}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3}^{\text{a}}-3\cdot\text{Fila 2}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 3\\ \hline 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila 3}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, por lo que el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]
Una imprenta debe diseñar un cartel con 90 cm2 de área para texto y además, con margen superior 3 cm, inferior 2 cm y márgenes laterales 4 cm cada uno.
A. [0,25 PUNTOS] Realice un dibujo planteando el problema.
B. [2,25 PUNTOS] Calcule las dimensiones (anchura y altura) que debe tener el cartel de manera que se utilice la menor cantidad de papel posible.

A.



B. Hemos llamado "x" a la anchura e "y" a la altura.
La zona de texto tiene un área de 90 cm^2 y su base es $x - 8$ y la altura $y - 5$ por lo que:

$$90 = (x-8)(y-5) \Rightarrow y-5 = \frac{90}{x-8} \Rightarrow y = \frac{90}{x-8} + 5 = \frac{90+5x-40}{x-8} = \frac{5x+50}{x-8}.$$

Deseamos minimizar la cantidad de papel, es decir, el área total: $A(x,y) = xy$.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y) = xy \\ y = \dfrac{5x+50}{x-8} \end{array}\right\} \Rightarrow A(x) = x\left(\frac{5x+50}{x-8}\right) = \frac{5x^2+50x}{x-8}$$

Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca del mínimo.

$$A(x)=\frac{5x^2+50x}{x-8}\Rightarrow A'(x)=\frac{(10x+50)(x-8)-1\cdot(5x^2+50x)}{(x-8)^2}=$$

$$=\frac{10x^2-80x+\cancel{50x}-400-5x^2-\cancel{50x}}{(x-8)^2}=\frac{5x^2-80x-400}{(x-8)^2}$$

$$A'(x)=0\Rightarrow\frac{5x^2-80x-400}{(x-8)^2}=0\Rightarrow 5x^2-80x-400=0\Rightarrow x^2-16x-80=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4(-80)}}{2}=\frac{16\pm 24}{2}=\begin{cases}\dfrac{16+24}{2}=\boxed{20=x}\\ \dfrac{16-24}{2}=-4=x\end{cases}$$

Solo nos interesa el valor positivo *x* = *20.*

Estudiamos el cambio de signo de la derivada antes y después de *x* = *20.*

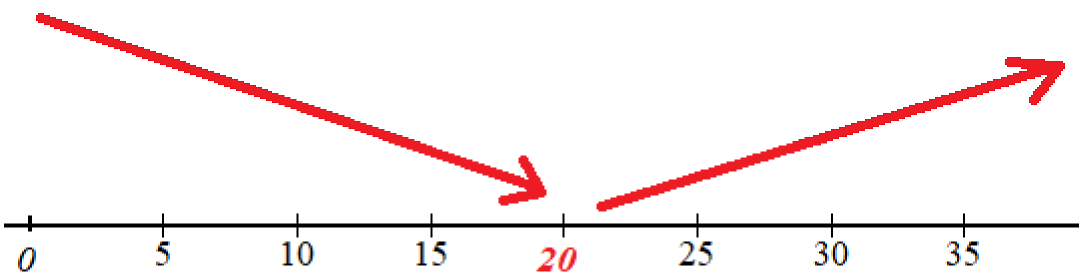
En $(0,20)$ tomamos *x* = *10* y la derivada vale $A'(10)=\frac{5\cdot 10^2-80\cdot 10-400}{(10-8)^2}=\frac{-700}{4}<0$.

La función decrece en $(0,20)$.

En $(20,+\infty)$ tomamos *x* = *30* y la derivada vale $A'(30)=\frac{5\cdot 30^2-80\cdot 30-400}{(30-8)^2}=\frac{425}{121}>0$.

La función crece en $(20,+\infty)$.

La función área sigue el esquema siguiente:



La función tiene un mínimo en *x* = *20.*

El área es mínima teniendo por anchura 20 cm y de altura $y=\frac{90}{20-8}+5=12.5$ cm

El gasto en papel es mínimo con las medidas de 20×12.5 cm.

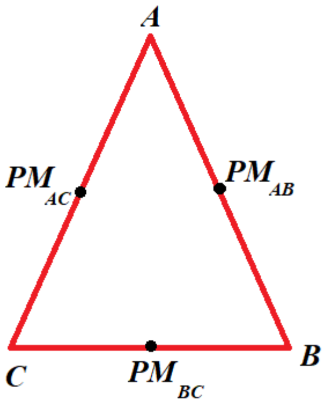
Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se llama mediana de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice. Considere el triángulo de vértices A = (–1,2,3), B = (3,–4,1), C = (1,–4,5).

A. [1,5 PUNTOS] Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo ABC.

B. [1 PUNTO] Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

A. Hacemos un dibujo de la situación planteada dando nombre a los puntos medios de cada segmento.



Mediana que pasa por A y PM_{BC}.

$$PM_{BC}=\frac{(3,-4,1)+(1,-4,5)}{2}=\frac{(4,-8,6)}{2}=(2,-4,3)$$

$$\left.\begin{array}{l}A=(-1,2,3)\\ PM_{BC}=(2,-4,3)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{APM_{BC}}=(2,-4,3)-(-1,2,3)=(3,-6,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_A=\frac{1}{3}\overrightarrow{APM_{BC}}=(1,-2,0)\\ A=(-1,2,3)\in m_A\end{array}\right\}\Rightarrow m_A:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=2-2\lambda\\ z=3\end{cases}$$

Mediana que pasa por B y PM_{AC}.

$$PM_{AC}=\frac{(-1,2,3)+(1,-4,5)}{2}=\frac{(0,-2,8)}{2}=(0,-1,4)$$

$$\left.\begin{array}{l}B=(3,-4,1)\\ PM_{AC}=(0,-1,4)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{BPM_{AC}}=(0,-1,4)-(3,-4,1)=(-3,3,3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_B=\frac{1}{3}\overrightarrow{BPM_{AC}}=(-1,1,1)\\ B=(3,-4,1)\in m_B\end{array}\right\}\Rightarrow m_B:\begin{cases}x=3-\alpha\\ y=-4+\alpha\\ z=1+\alpha\end{cases}$$

Mediana que pasa por C y PM_{AB}.

$$PM_{AB} = \frac{(-1,2,3)+(3,-4,1)}{2} = \frac{(2,-2,4)}{2} = (1,-1,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} C=(1,-4,5) \\ PM_{AB}=(1,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{C\,PM_{AB}} = (1,-1,2)-(1,-4,5) = (0,3,-3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_C} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C\,PM_{AB}} = (0,1,-1) \\ C=(1,-4,5)\in m_C \end{array}\right\} \Rightarrow m_C : \begin{cases} x=1 \\ y=-4+\beta \\ z=5-\beta \end{cases}$$

B. Hallamos el punto de corte de la mediana m_A con m_B.

$$\left.\begin{array}{l} m_A : \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=3 \end{cases} \\ m_B : \begin{cases} x=3-\alpha \\ y=-4+\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -1+\lambda=3-\alpha \\ 2-2\lambda=-4+\alpha \\ 3=1+\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4+\lambda=-\alpha \\ 6-2\lambda=\alpha \\ 2=\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4+\lambda=-2 \\ 6-2\lambda=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ -2\lambda=-4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow \begin{cases} x=-1+2=1 \\ y=2-4=-2 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(1,-2,3)}$$

Hallamos el punto de corte de la mediana m_A con m_C.

$$\left.\begin{array}{l} m_A : \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=3 \end{cases} \\ m_C : \begin{cases} x=1 \\ y=-4+\beta \\ z=5-\beta \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -1+\lambda=1 \\ 2-2\lambda=-4+\beta \\ 3=5-\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ -2\lambda=\beta-6 \\ \beta=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=2 \\ -4=2-6 \\ \beta=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow \begin{cases} x=-1+2=1 \\ y=2-4=-2 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(1,-2,3)}$$

Coinciden las tres medianas en el mismo punto $P(1,-2,3)$.

A este punto se le llama baricentro del triángulo.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

En un almacén, el peso de los contenedores sigue una distribución normal con media 100 kg y desviación típica 10 kg. Cada contenedor se carga individualmente en un montacargas, que tiene una capacidad de 120 kg. Si el peso del contenedor supera dicha capacidad, salta una alarma.
Se coloca en el montacargas un contenedor escogido al azar.
A. [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que salte la alarma.
B. [1,25 PUNTOS] Calcule cuál debería ser la capacidad del montacargas para que la alarma salte solo en un 1 % de las veces que cargamos un contenedor al azar.

X = Peso de un contenedor. X = N (100, 10)

A. Nos piden calcular $P\left(X \geq 120\right)$.

$$P\left(X \geq 120\right) = \left\{Tipificamos\right\} = P\left(\frac{X-100}{10} \geq \frac{120-100}{10}\right) = P\left(Z \geq 2\right) = 1 - P\left(Z \leq 2\right) =$$

$$= \left\{\text{Miramos en la tabla N(0,1)}\right\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

B. Nos piden calcular "*a*" para que $P\left(X \geq a\right) = 0.01$

$$P\left(X \geq a\right) = 0.01 \Rightarrow \left\{Tipificamos\right\} \Rightarrow P\left(\frac{X-100}{10} \geq \frac{a-100}{10}\right) = 0.01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \geq \frac{a-100}{10}\right) = 0.01 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a-100}{10}\right) = 0.01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a-100}{10}\right) = 0.99 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Buscamos esta probabilidad} \\ \text{en la tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a-100}{10} = 2.33 \Rightarrow a - 100 = 23.3 \Rightarrow \boxed{a = 123.3\,kg}$$

La capacidad del montacargas debería ser de 123.3 kg para que salte la alarma solo el 1 % de las veces.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

A. [0,5 PUNTOS] Compruebe que las matrices A y B son regulares.
B. [0,5 PUNTOS] Calcule las matrices inversas de A y B.
C. [0,75 PUNTOS] Despeje *X* en la ecuación matricial *AXB* = A^t – 3*B* en donde A^t denota la matriz traspuesta de *A*.

D. [0,75 PUNTOS] Calcule *X*.

A. Para que sean regulares su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-4+3=-1\neq 0$$

$$|B|=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2+3=1\neq 0$$

Las matrices A y B son regulares (tienen matriz inversa)

B. Utilizamos la fórmula para el cálculo de la inversa con adjuntos.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

C. Despejamos X en la ecuación.

$$AXB=A^t-3B\Rightarrow A^{-1}\cdot AXB\cdot B^{-1}=A^{-1}\left(A^t-3B\right)B^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}\left(A^t-3B\right)B^{-1}$$

D. Sustituimos el valor de cada matriz y realizamos las operaciones indicadas.

$$A^t-3B=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-1&-3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+3&-1+9\\3-3&-2-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&8\\0&-8\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\left(A^t-3B\right)B^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&8\\0&-8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&16-24\\-5&-8+16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}10&-8\\-5&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20+8&30+8\\-10-8&-15-8\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}28&38\\-18&-23\end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=x^2e^{-x}$.

A. [1 PUNTO] Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

B. [0,5 PUNTOS] Calcule la derivada primera de *f(x)*.

C. [0,5 PUNTOS] Determine los extremos relativos de *f(x)*.

D. [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*.

A. Como *e = 2.71…. >1* se cumple que $\lim_{x\to+\infty} e^x = e^{+\infty} = +\infty$.

Lo aplicamos en el cálculo de los límites pedidos.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty} = Indeterminación(L´Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = Indeterminación(L´Hôpital) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = \frac{2}{+\infty} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = (-\infty)^2\cdot e^{+\infty} = (+\infty)(+\infty) = \boxed{+\infty}$$

B. $f(x)=x^2e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{-x} + x^2e^{-x}(-1) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x}$

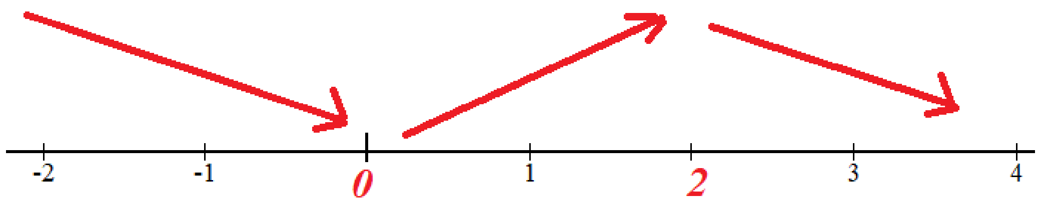
C. Igualamos a cero la derivada y obtenemos los puntos críticos.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \Rightarrow xe^{-x}(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ e^{-x}=0 \text{ ¡Im}posible! \\ 2-x=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1) = 2(-1)e^1 - (-1)^2e^1 = -2e - e = -3e < 0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En $(0,2)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1) = 2e^{-1} - 1^2e^{-1} = \frac{2}{e} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e} > 0$. La función crece en $(0,2)$
- En $(2,+\infty)$ tomamos *x = 3* y la derivada vale $f'(3) = 6e^{-3} - 9e^{-3} = -3e^{-1} < 0$. La función decrece en $(2,+\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función presenta un mínimo relativo en *x = 0* y un máximo relativo en *x = 2.*

Como $f(0)=0^2e^{-0}=0$ y $f(2)=2^2e^{-2}=\frac{4}{e^2}$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(0,0)$ y el máximo relativo $\left(2,\frac{4}{e^2}\right)$

D. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento se han estudiado en el apartado anterior. La función decrece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y crece en $(0,2)$.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

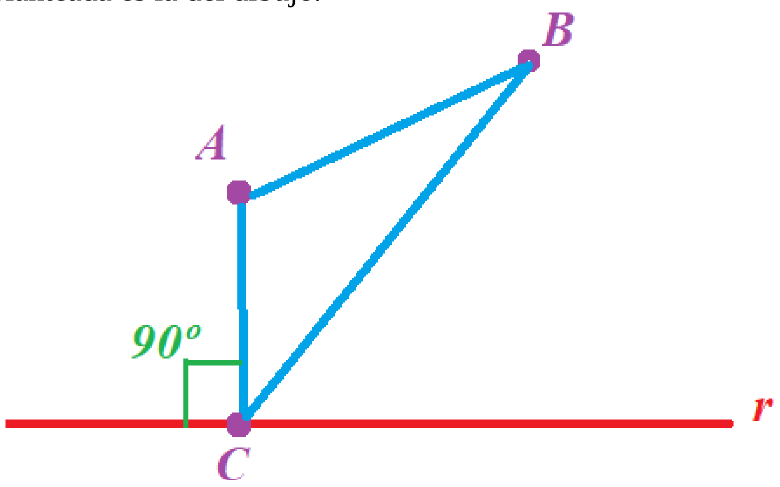
Los puntos A = (2, 0, 0), B = (–1, 12, 4) son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice se encuentra en la recta $r = \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$

A. [1,5 PUNTOS] Calcule las coordenadas del tercer vértice C, sabiendo que la recta r es perpendicular a la recta que pasa por los puntos A y C.

B. [0,5 PUNTOS] Determine el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

C. [0,5 PUNTOS] Calcule el área del triángulo ABC.

A. La situación planteada es la del dibujo.



Hallamos el plano π perpendicular a la recta *r* y el punto C será la intersección del plano con la recta.

$$r=\begin{cases}4x+3z=33\\ y=0\end{cases} \Rightarrow r=\begin{cases}3z=33-4x\\ y=0\end{cases} \Rightarrow r=\begin{cases}z=\frac{33}{3}-\frac{4}{3}x\\ y=0\end{cases} \Rightarrow r=\begin{cases}x=t\\ y=0\\ z=11-\frac{4}{3}t\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases}\vec{v_r}=\left(1,0,-\frac{4}{3}\right)\to \vec{u_r}=3\vec{v_r}=(3,0,-4)\\ P_r(0,0,11)\end{cases}$$

El plano perpendicular tiene como vector normal el director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\vec{u_r}=(3,0,-4)\\ A=(2,0,0)\in\pi\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\pi:3x-4z+D=0\\ A=(2,0,0)\in\pi\end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 2-0+D=0 \Rightarrow D=-6 \Rightarrow \pi:3x-4z-6=0$$

Hallamos el punto C de corte de plano y recta.

$$\left.\begin{array}{l}\pi:3x-4z-6=0\\ r=\begin{cases}x=t\\ y=0\\ z=11-\frac{4}{3}t\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 3t-4\left(11-\frac{4}{3}t\right)-6=0 \Rightarrow 3t-44+\frac{16}{3}t-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9t-132+16t-18=0 \Rightarrow 25t=150 \Rightarrow t=\frac{150}{25}=6 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=0 \\ z=11-\frac{4}{3}6=3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(6,0,3)}$$

B. Calculamos las coordenadas de los vectores y luego calculamos el ángulo que forman usando el producto escalar.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(-1,12,4)-(2,0,0)=(-3,12,4) \\ \overrightarrow{AC}=(6,0,3)-(2,0,0)=(4,0,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=$$

$$=\frac{(-3,12,4)(4,0,3)}{\sqrt{(-3)^2+12^2+4^2}\sqrt{4^2+0^2+3^2}}=\frac{-12+12}{65}=0$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\cos^{-1}(0)=90^{\circ}$$

Los vectores forman 90º, son perpendiculares.

C. El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

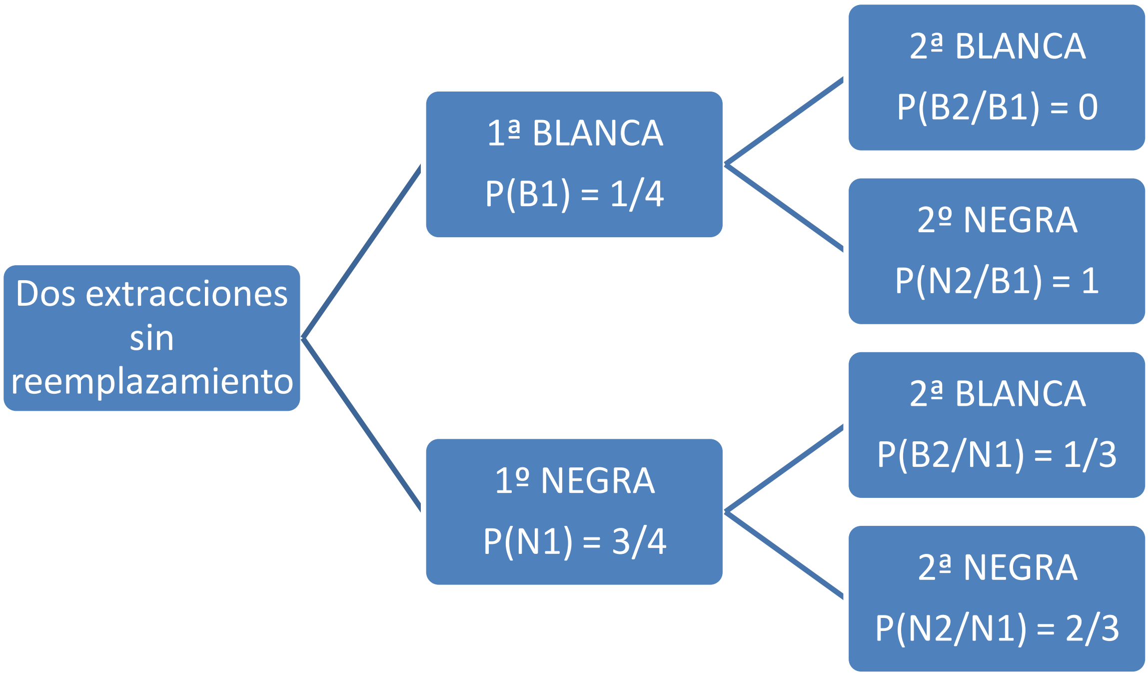
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(-3,12,4) \\ \overrightarrow{AC}=(4,0,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 12 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}=36i+16j-48k+9j=(36,25,-48)$$

$$\text{Área } ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{36^2+25^2+(-48)^2}}{2}=\frac{65}{2}=\boxed{32.5u^2}$$

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En una urna hay 4 bolas, una de ellas es blanca y las otras tres negras. Sacamos una bola al azar y sin devolverla a la urna sacamos una segunda bola también al azar.
A. [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean de distinto color.
B. [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color.
C. [0,5 PUNTOS] Calcule la probabilidad de sacar una bola negra en la segunda extracción, si sabemos que la primera bola fue negra.

Hacemos un diagrama de árbol.



He llamado B1 a "Sacar bola blanca en 1ª extracción", N1 a "Sacar bola negra en 1ª extracción", B2 a "Sacar bola blanca en 2ª extracción" y N2 a "Sacar bola negra en 2ª extracción".

A. Es la probabilidad de sacar blanca primero y negra después o negra primero y blanca después.

$$P(\text{Las dos bolas de distinto color}) = P(B1 \cap N2) + P(N1 \cap B2) =$$

$$= P(B1)P(N2/B1) + P(N1)P(B2/N1) = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

B. Como es el suceso contrario del suceso planteado en el primer apartado tenemos que:

$$P(\text{Las dos del mismo color}) = 1 - P(\text{Las dos bolas de distinto color}) = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

C. Esta probabilidad está indicada en el diagrama de árbol. Al sacar una bola negra en la primera extracción nos quedan en la urna 1 bola blanca y 2 bolas negras y aplicando la regla de Laplace tenemos que $P(N2/N1) = \boxed{\frac{2}{3} \simeq 0.66}$