UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2022

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES

1. Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución.
4. Todas las respuestas deben ser razonadas. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *t*.

$$\begin{cases} tx+y+z=4 \\ x-ty+z=1 \\ x+y+z=t+2 \end{cases}$$

A. [0,75 PUNTOS] Determine para qué valores de *t* el sistema tiene solución única.
B. [1 PUNTO] Determine para qué valores de *t* el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.
C. [0,75 PUNTOS] Determine para qué valores de *t* el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

A. [0,5 PUNTOS] Calcule la derivada primera de *f(x)*.
B. [0,5 PUNTOS] Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa *x = 2*.
C. [0,5 PUNTOS] Calcule las asíntotas verticales de *f (x)*.
D. [1 PUNTO] Calcule las asíntotas horizontales de *f (x)*.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Los puntos A = (0,–1,1), B = (1,1,1) son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice está contenido en la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano $\pi = 2x - y + z = 1$.

A. [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación de la recta *r*.

B. [1 PUNTO] Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

El tiempo de vuelo de un avión Santander – Madrid sigue una distribución normal de media 60 minutos y desviación típica 5 minutos.

A. [1,25 PUNTOS] Para conectar con el siguiente vuelo con destino Sevilla, se necesita que el avión tarde menos de T = 70 minutos. Calcule la probabilidad de perder el avión a Sevilla.

B. [1,25 PUNTOS] Calcule cuanto debe valer T para que la probabilidad de perder el avión sea del 0,1 %.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A. [0,5 PUNTOS] Calcule A^2 y comprueba que es regular.

B. [0,5 PUNTOS] Calcule la matriz inversa de A^2.

C. [1 PUNTO] Despeje X en la ecuación matricial $A^2X+B=C$.

D. [0,5 PUNTOS] Calcule la matriz X de orden 2×2, que verifica $A^2X+B=C$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\frac{3}{x}$.

A. [1 PUNTO] Calcule el dominio y las asíntotas de *f(x)*.

B. [0,5 PUNTOS] Halle una primitiva de *f(x)*.

C. [0,5 PUNTOS] Calcule el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = e$ y el eje OX de abscisas.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera la recta $r:\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x-2y-z=-1$.

A. [1 PUNTO] Estudie la posición relativa de recta y plano.

B. [1,5 PUNTOS] Si r corta a π calcule el punto de corte y el ángulo que forman. Si la recta no corta al plano, calcule la distancia entre ambos.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

El 90 % de las personas de una población están vacunadas contra la enfermedad E. El 5 % de las personas no vacunadas tienen la enfermedad E, y el 1 % de las personas vacunadas también han contraído la enfermedad.

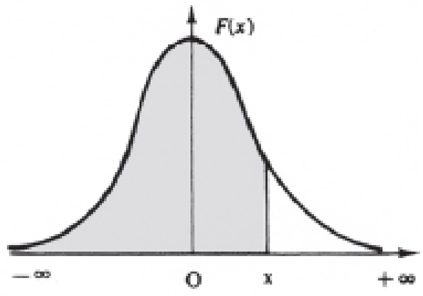
Se selecciona una persona al azar de dicha población:

A. [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de la persona esté enferma.

B. [1,5 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que esté vacunada sabiendo que está enferma.

Distribución normal

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

SOLUCIONES

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro *t*.

$$\begin{cases} tx+y+z=4 \\ x-ty+z=1 \\ x+y+z=t+2 \end{cases}$$

A. [0,75 PUNTOS] Determine para qué valores de *t* el sistema tiene solución única.

B. [1 PUNTO] Determine para qué valores de *t* el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

C. [0,75 PUNTOS] Determine para qué valores de *t* el sistema no tiene solución.

Estudiamos la compatibilidad del sistema y luego respondemos a los apartados.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t+2 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-t^2+1+1+t-1-t=-t^2+1$$

$$|A|=0 \Rightarrow -t^2+1=0 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow \boxed{t=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $t \neq -1$ y $t \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $t=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente y establecer más fácilmente la compatibilidad del sistema.

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fila } 2^{a} + \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 2 & 2 & 5 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 (la 3ª fila es nula) al igual que el rango de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $t=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.
Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente y establecer más fácilmente la compatibilidad del sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^{a} - \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -4 \\ \hline 0 & -2 & 0 & -3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 (la 3ª fila es nula), pero el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Las respuestas son:

A. Para $t \neq -1$ y $t \neq 1$.

B. Para $t=-1$.

Lo resolvemos utilizando el sistema equivalente obtenido en el estudio previo.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+y+z=4 \\ 2y+2z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} z=4+x-y \\ 2y+2z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y+2(4+x-y)=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y+8+2x-2y=5 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow \boxed{x=\frac{-3}{2}} \Rightarrow z=4-\frac{3}{2}-y \Rightarrow \boxed{z=\frac{5}{2}-y}$$

La solución es $x=\dfrac{-3}{2}$, $y=t$, $z=\dfrac{5}{2}-t$, $t \in \mathbb{R}$

C. Para $t=1$.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\frac{e^x}{x}$

A. [0,5 PUNTOS] Calcule la derivada primera de *f(x)*.
B. [0,5 PUNTOS] Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa *x = 2*.
C. [0,5 PUNTOS] Calcule las asíntotas verticales de *f (x)*.
D. [1 PUNTO] Calcule las asíntotas horizontales de *f (x)*.

A.

$$f(x)=\frac{e^x}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{e^x x-1\cdot e^x}{x^2}=\frac{xe^x-e^x}{x^2}$$

B. La pendiente es el valor de la derivada en dicho punto.

$$\text{Pendiente}=f'(2)=\frac{2e^2-e^2}{2^2}=\frac{e^2}{4}$$

C. El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x}=\frac{e^0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical.

D. Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}=Indeterminación(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=e^{+\infty}=+\infty$$

No hay asíntota horizontal cuando *x* tiende a +∞.

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{-x}}=\frac{1}{(-\infty)e^{+\infty}}=\frac{1}{-\infty}=0$$

Cuando *x* tiende a –∞ la asíntota horizontal es $y=0$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Los puntos A = (0,–1,1), B = (1,1,1) son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice está contenido en la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$.

A. [1,5 PUNTOS] Calcule la ecuación de la recta *r*.

B. [1 PUNTO] Calcule las coordenadas del vértice C sabiendo que el área del triángulo es $3\sqrt{30}$.

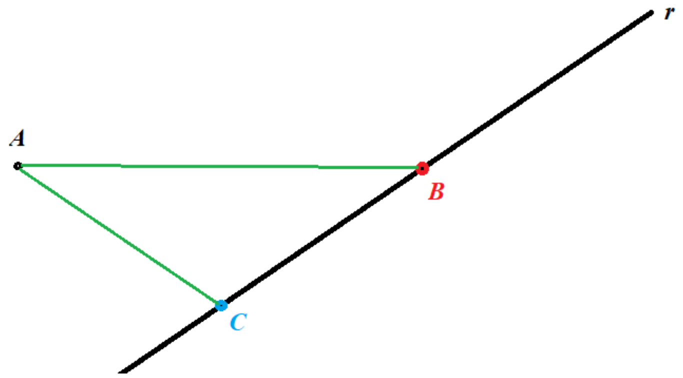
A. Hallamos la ecuación de la recta *r* que pasa por el punto *B* y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$.

Si la recta es perpendicular al plano su vector director es el vector normal del plano.

$$\pi \equiv 2x - y + z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (2,-1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r} = \vec{n} = (2,-1,1) \\ B(1,1,1) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 1+t \end{cases}}$$

B. El punto C pertenece a la recta *r*, por lo que sus coordenadas son $C(1+2t, 1-t, 1+t)$



El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (0,-1,1) = (1,2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (1+2t, 1-t, 1+t) - (0,-1,1) = C(1+2t, 2-t, t) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1+2t & 2-t & t \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 2ti + (2-t)k + (-2-4t)k - tj = 2ti - tj - 5tk = (2t, -t, -5t)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(2t)^2 + (-t)^2 + (-5t)^2} = \sqrt{4t^2 + t^2 + 25t^2} = \sqrt{30t^2} = |t|\sqrt{30}$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|t|\sqrt{30}}{2}$$

Como debe ser igual $3\sqrt{30}$ tenemos que:

$$\text{Área } ABC = \frac{|t|\sqrt{30}}{2} = 3\sqrt{30} \Rightarrow |t| = 6 \Rightarrow \begin{cases} t = 6 \Rightarrow C(1+12, 1-6, 1+6) \Rightarrow \boxed{C(13,-5,7)} \\ t = -6 \Rightarrow C´(1-12, 1+6, 1-6) \Rightarrow \boxed{C´(-11,7,-5)} \end{cases}$$

La situación planteada tiene dos soluciones: $C(13,-5,7)$ y $C´(-11,7,-5)$

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

El tiempo de vuelo de un avión Santander – Madrid sigue una distribución normal de media 60 minutos y desviación típica 5 minutos.

A. [1,25 PUNTOS] Para conectar con el siguiente vuelo con destino Sevilla, se necesita que el avión tarde menos de T = 70 minutos. Calcule la probabilidad de perder el avión a Sevilla.

B. [1,25 PUNTOS] Calcule cuanto debe valer T para que la probabilidad de perder el avión sea del 0,1 %.

X = El tiempo de vuelo de un avión Santander – Madrid (en minutos).

X = N(60, 5)

A. Nos piden la probabilidad de que tarde más de 70 minutos.

$$P(X \geq 70) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{70-60}{5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) =$$

$$= \{\text{Buscamos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

x	0.00	0.0
0.0	.5000	.504
0.1	.5398	.543
0.2	.5793	.583
0.3	.6179	.621
0.4	.6554	.659
0.5	.6915	.695
0.6	.7257	.729
0.7	.7580	.761
0.8	.7881	.791
0.9	.8159	.818
1.0	.8413	.843
1.1	.8643	.866
1.2	.8849	.886
1.3	.9032	.904
1.4	.9192	.920
1.5	.9332	.934
1.6	.9452	.946
1.7	.9554	.956
1.8	.9641	.964
1.9	.9713	.971
2.0	.9772	.977
2.1	.9821	.982

B. Nos piden el valor de T para el que $P(X \geq T) = 0.001$.

$$P(X \geq T) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{T-60}{5}\right) = \left\{\frac{T-60}{5} > 0\right\} =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{T-60}{5}\right) = 0.001 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{T-60}{5}\right) = 0.999 \Rightarrow \{\text{Miramos en la tabla}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T-60}{5} = 3.1 \Rightarrow \boxed{T = 60 + 15.5 = 75.5 \text{ minutos}}$$

El tiempo debe ser de 75 minutos y 30 segundos.

x	0.00	0.
0.0	.5000	.50
0.1	.5398	.54
0.2	.5793	.58
0.3	.6179	.62
0.4	.6554	.65
0.5	.6915	.69
0.6	.7257	.72
0.7	.7580	.76
0.8	.7881	.79
0.9	.8159	.81
1.0	.8413	.84
1.1	.8643	.86
1.2	.8849	.88
1.3	.9032	.90
1.4	.9192	.92
1.5	.9332	.93
1.6	.9452	.94
1.7	.9554	.95
1.8	.9641	.96
1.9	.9713	.97
2.0	.9772	.97
2.1	.9821	.98
2.2	.9861	.98
2.3	.9893	.98
2.4	.9918	.99
2.5	.9938	.99
2.6	.9953	.99
2.7	.9965	.99
2.8	.9974	.99
2.9	.9981	.99
3.0	.9987	.99
3.1	.9990	.99
3.2	.9993	.99
3.3	.9995	.99

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A. [0,5 PUNTOS] Calcule A^2 y comprueba que es regular.
B. [0,5 PUNTOS] Calcule la matriz inversa de A^2.
C. [1 PUNTO] Despeje X en la ecuación matricial $A^2X+B=C$.

D. [0,5 PUNTOS] Calcule la matriz X de orden 2×2, que verifica $A^2X+B=C$.

A. Calculamos la expresión de A^2 y calculamos su determinante.

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1-2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left|A^2\right|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=4\neq 0$$

La matriz A^2 es regular pues su determinante es no nulo.

B.

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow\left(A^2\right)^T=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left|A^2\right|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=4$$

$$\left(A^2\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A^2\right)^T\right)}{\left|A^2\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}{4}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left(A^2\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}}$$

C. Sabemos que la matriz A^2 es regular.

$$A^2X+B=C\Rightarrow A^2X=C-B\Rightarrow X=\left(A^2\right)^{-1}(C-B)$$

D. Sustituimos los valores de las matrices y calculamos X.

$$X=\left(A^2\right)^{-1}(C-B)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\frac{3}{x}$.

A. [1 PUNTO] Calcule el dominio y las asíntotas de *f(x)*.
B. [0,5 PUNTOS] Halle una primitiva de *f(x)*.
C. [0,5 PUNTOS] Calcule el área de la región limitada por la función *y = f (x)*, las rectas *x = 1*, *x = e* y el eje OX de abscisas.

A. El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
Dominio f(x) = $\mathbb{R}-\{0\}$

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}=\frac{3}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=\frac{3}{\infty}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

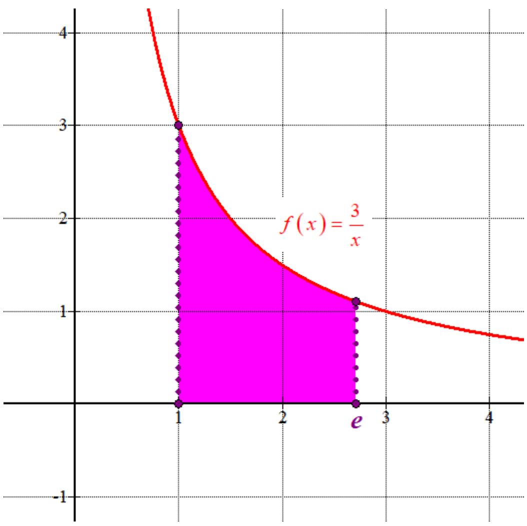
No existe pues la función tiene asíntota horizontal.

B.

$$F(x)=\int f(x)\,dc=\int\frac{3}{x}dx=3\int\frac{1}{x}dx=\boxed{3\ln|x|+K}$$

C. En el intervalo $[1,e]$ la función es positiva y no corta el eje de abscisas.
El área pedida es la integral definida de la función entre 1 y *e*.

$$Área=\int_1^e\frac{3}{x}dx=\left[3\ln|x|\right]_1^e=3\ln e-3\ln 1=\boxed{3u^2}$$



Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera la recta $r:\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ y el plano $\pi: x-2y-z=-1$.

A. [1 PUNTO] Estudie la posición relativa de recta y plano.

B. [1,5 PUNTOS] Si r corta a π calcule el punto de corte y el ángulo que forman. Si la recta no corta al plano, calcule la distancia entre ambos.

A. Sacamos un punto y un vector de la recta.

$$r:\frac{x+1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}\Rightarrow r:\begin{cases}P_r(-1,-3,0)\\ \overrightarrow{v_r}=(-1,2,1)\end{cases}$$

Para que recta y plano sean paralelos o la recta esté contenida en el plano el vector normal del plano y el director de la recta tienen que ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{r}\pi: x-2y-z=-1\Rightarrow \vec{n}=(1,-2,-1)\\ \overrightarrow{v_r}=(-1,2,1)\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=0\end{array}\right\}\Rightarrow (1,-2,-1)(-1,2,1)=-1-4-1=-6\neq 0$$

Como el producto escalar es no nulo la recta y el plano se cortan en un punto.

C. Hallamos el punto P de corte de recta y plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r}r:\begin{cases}P_r(-1,-3,0)\\ \overrightarrow{v_r}=(-1,2,1)\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=-1-\lambda\\ y=-3+2\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\\ \pi: x-2y-z=-1\end{array}\right\}\Rightarrow -1-\lambda-2(-3+2\lambda)-\lambda=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1-\lambda+6-4\lambda-\lambda=-1\Rightarrow -6\lambda=-6\Rightarrow \lambda=1\Rightarrow\begin{cases}x=-1-1=-2\\ y=-3+2=-1\Rightarrow \boxed{P(-2,-1,1)}\\ z=1\end{cases}$$

Hallamos el ángulo entre el vector normal del plano y el director de la recta.

$$\left.\begin{array}{r}\vec{n}=(1,-2,-1)\\ \overrightarrow{v_r}=(-1,2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{v_r}\right)=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_r}\right|}=\frac{\left|(1,-2,-1)(-1,2,1)\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}=\frac{\left|-1-4-1\right|}{\sqrt{6}\sqrt{6}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\left(\vec{n},\overrightarrow{v_r}\right)=\frac{6}{6}=1\Rightarrow\left(\vec{n},\overrightarrow{v_r}\right)=\cos^{-1}(1)=0^{\circ}$$

Por lo que el ángulo entre recta y plano es 90 – 0 = 90º. Son perpendiculares.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

El 90 % de las personas de una población están vacunadas contra la enfermedad E. El 5 % de las personas no vacunadas tienen la enfermedad E, y el 1 % de las personas vacunadas también han contraído la enfermedad.

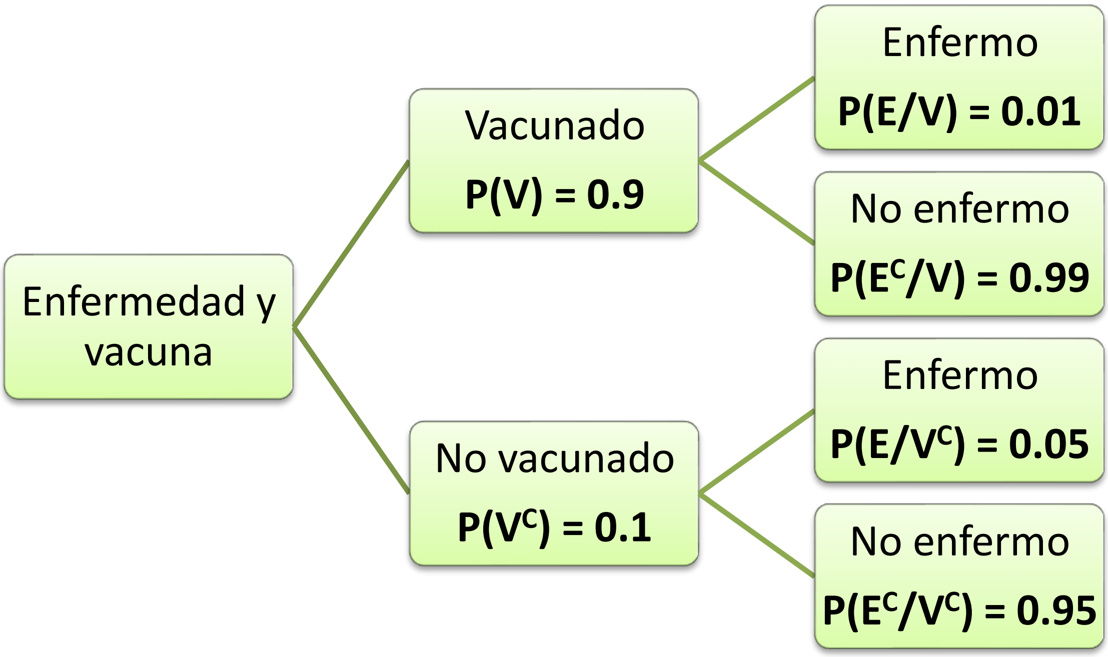
Se selecciona una persona al azar de dicha población:

A. [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de la persona esté enferma.

B. [1,5 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que esté vacunada sabiendo que está enferma.

Ponemos los datos en un diagrama de árbol.

E = Estar enfermo de la enfermedad E, V = Estar vacunado.



A. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(E) = P(V)P(E/V) + P(V^C)P(E/V^C) = 0.9\cdot 0.01 + 0.1\cdot 0.05 = \boxed{0.014}$$

B. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(V/E) = \frac{P(V\cap E)}{P(E)} = \frac{P(V)P(E/V)}{P(E)} = \frac{0.9\cdot 0.01}{0.014} = \boxed{\frac{9}{14} \simeq 0.643}$$