UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2021

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse sólo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realizan más de cuatro ejercicios sólo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \lambda^2 x + 3y = 3\lambda \\ 3x + y = 3 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.

3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.

2) [0.5 PUNTOS] Halla los intervalos de crecimiento, y/o decrecimiento.

3) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 2$.

4) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (-1, 0, 1)$ y el origen de coordenadas O.

1) [0.75 PUNTOS] Calcula la ecuación del plano, Π, que contiene a los puntos A, B y C.

2) [0.25 PUNTOS] Comprueba que el origen de coordenadas, O, está contenido en el plano Π.

3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{OC}$ y que $\overrightarrow{AO}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$.

4) [1 PUNTO] Calcula el área del paralelogramo $ABCO$.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Una determinada especie de aves siempre pone dos huevos, pero a la madre solo le es posible alimentar a un polluelo, el más fuerte de los dos. El polluelo del huevo que primero eclosiona tiene un 60% de probabilidad de ser el superviviente, mientras que el polluelo del huevo que eclosiona en segundo lugar tiene una probabilidad de sobrevivir del 30%.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un polluelo cualquiera sea el superviviente, si no sabemos si eclosionó en primer lugar o en segundo lugar su huevo.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un ave adulta de dicha especie proceda de un huevo eclosionado en segundo lugar.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación matricial $XA - 2X = A$, en donde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -2 \end{pmatrix}$, siendo a una constante real.

1) [0.5 PUNTOS] Estudia el rango de A en función del parámetro a.

2) [0.25 PUNTOS] Indica para que valores se puede calcular la inversa de A.

3) [0.75 PUNTOS] Despeja X de la ecuación matricial.

4) [1 PUNTO] Calcula X para $a = 2$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x) = -x^2 + 4x$.

1) [0.25 PUNTOS] Calcula la derivada de $f(x)$.

2) [0.75 PUNTOS] Halla los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de $f(x)$.

3) [0.5 PUNTOS] Calcula una primitiva de $f(x)$.

4) [1 PUNTO] Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 3$ y el eje OX de abscisas.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (2, 1, 5)$, $B = (3, 4, 1)$ y la recta $r = \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 4 - 3\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{cases}$

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta, r', que pase por A y B

2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de las rectas r y r'.

3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y el origen de coordenadas.

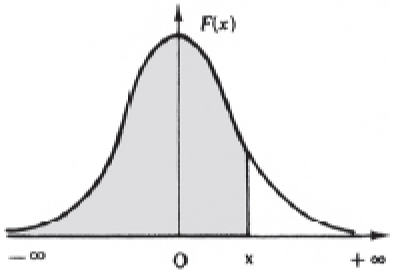
Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

En una determinada población de adultos sanos, la concentración media de colesterol en sangre sigue una distribución normal con media 190 mg/dl y desviación típica 30 mg/dl. Un nivel elevado de colesterol puede indicar posibles problemas de salud.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un adulto sano de la población tenga un nivel de colesterol superior a 250 mg/dl.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula qué nivel de colesterol solo superan el 1% de adultos sanos de dicha población.

$$F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	:9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

SOLUCIONES

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \lambda^2 x + 3y = 3\lambda \\ 3x + y = 3 \end{cases}$ dependiente del parámetro λ.

1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de λ el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro λ si es necesario.

3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de λ el sistema no tiene solución.

1) Comprobamos cuando el determinante de la matriz de coeficientes es nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \sqrt{9} = \pm 3$$

Para $\lambda = 3$ el sistema queda $\begin{cases} 9x + 3y = 9 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$, lo resolvemos:

$$\begin{cases} 9x + 3y = 9 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Ecuación 1ª} \ - \ 3 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{ccc} 9x & +3y & =9 \\ -9x & -3y & =-9 \\ \hline 0 & 0 & =0 \end{array} \\ \text{Nueva ecuación 1ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow 3x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 3x$$

$$\textit{Soluciones}: x = t;\ y = 3 - 3t,\ t \in \mathbb{R}$$

El sistema tiene infinitas soluciones para $\lambda = 3$

2) El sistema tiene solución única para cualquier valor de λ distinto de 3 y de –3
Ya que el determinante de A es no nulo y por lo tanto su rango es 2 al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas.

$$\begin{cases} \lambda^2 x + 3y = 3\lambda \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2 x + 3y = 3\lambda \\ y = 3 - 3x \end{cases} \Rightarrow \lambda^2 x + 3(3 - 3x) = 3\lambda \Rightarrow \lambda^2 x + 9 - 9x = 3\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 x - 9x = 3\lambda - 9 \Rightarrow x(\lambda^2 - 9) = 3\lambda - 9 \Rightarrow x = \frac{3\lambda - 9}{\lambda^2 - 9} = \frac{3\cancel{(\lambda - 3)}}{\cancel{(\lambda - 3)}(\lambda + 3)} = \frac{3}{\lambda + 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 3 - 3\frac{3}{\lambda+3} = 3 - \frac{9}{\lambda+3} = \frac{3\lambda+9-9}{\lambda+3} = \frac{3\lambda}{\lambda+3}$$

$$Solución: x = \frac{3}{\lambda+3}; \quad y = \frac{3\lambda}{\lambda+3}$$

3)

Para $\lambda = -3$ el sistema queda $\begin{cases} 9x+3y=-9 \\ 3x+y=3 \end{cases}$, intentamos resoverlo.

$$\begin{cases} 9x+3y=-9 \\ 3x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Ecuación } 1^{a} \; - \; 3 \cdot \text{Ecuación } 2^{a} \\ \begin{array}{ccc} 9x & +3y & =-9 \\ -9x & -3y & =-9 \\ \hline 0 & 0 & =-18 \end{array} \\ \text{Nueva ecuación } 1^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 0=-18 \\ 3x+y=3 \end{cases} \Rightarrow ¡IMPOSIBLE!$$

El sistema no tiene solución para $\lambda = -3$

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera.

2) [0.5 PUNTOS] Halla los intervalos de crecimiento, y/o decrecimiento.

3) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f*(*x*) en el punto *x* = 2.

4) [1 PUNTO] Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

1)

$$f(x)=\frac{x}{e^x}=xe^{-x} \Rightarrow f\,'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)=\frac{1-x}{e^x}$$

2) Igualamos a cero la derivada y buscamos sus puntos críticos.

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow \frac{1-x}{e^x}=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$$

Valoramos el signo de la derivada antes y después de *x = 1*.

- En $(-\infty,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f\,'(0)=\dfrac{1-0}{e^0}=1>0$. La función crece en $(-\infty,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f\,'(2)=\dfrac{1-2}{e^2}=-\dfrac{1}{e^2}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,1)$ y decrece en $(1,+\infty)$.

3) La recta tangente a la gráfica de *f*(*x*) en el punto *x* = 2 tiene ecuación $y-f(2)=f\,'(2)(x-2)$

$$\left.\begin{array}{l} y-f(2)=f\,'(2)(x-2) \\ f(2)=\dfrac{2}{e^2} \\ f\,'(2)=\dfrac{-1}{e^2} \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{2}{e^2}=\frac{-1}{e^2}(x-2) \Rightarrow y-\frac{2}{e^2}=-\frac{1}{e^2}x+\frac{2}{e^2} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}}$$

4) Calculamos por separado los límites cuando $x \to +\infty$ y el límite cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L'Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=(-\infty)e^{+\infty}=(-\infty)(+\infty)=-\infty$$

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A = (1, 1, 0)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (-1, 0, 1)$ y el origen de coordenadas O.

1) [0.75 PUNTOS] Calcula la ecuación del plano, Π, que contiene a los puntos A, B y C.

2) [0.25 PUNTOS] Comprueba que el origen de coordenadas, O, está contenido en el plano Π.

3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a $\overrightarrow{OC}$ y que $\overrightarrow{AO}$ es paralelo a $\overrightarrow{BC}$.

4) [1 PUNTO] Calcula el área del paralelogramo $ABCO$.

1) El plano que contiene a los puntos A, B y C tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\Pi \equiv \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0,1,1)-(1,1,0) = (-1,0,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1,0,1)-(1,1,0) = (-2,-1,1) \\ A(1,1,0) \in \Pi \end{cases} \Rightarrow \Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y+2+z+y-1+x-1=0 \Rightarrow \boxed{\Pi \equiv x-y+z=0}$$

2) **¿**$O(0,0,0) \in \Pi$**?**

$$\left. \begin{array}{l} ¿O(0,0,0) \in \Pi? \\ \Pi \equiv x-y+z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow ¿0-0+0=0? \text{ ¡SIII!}$$

3) Para que sean paralelos deben ser proporcionales sus coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-1,0,1) \\ \overrightarrow{OC} = (-1,0,1)-(0,0,0) = (-1,0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} = \frac{0}{0} = \frac{1}{1}$$

Son iguales los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OC}$.

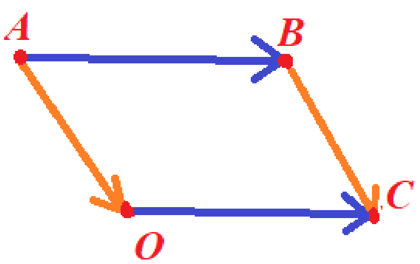
Para que sean paralelos deben ser proporcionales sus coordenadas.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AO} = (0,0,0)-(1,1,0) = (-1,-1,0) \\ \overrightarrow{BC} = (-1,0,1)-(0,1,1) = (-1,-1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} = \frac{-1}{-1} = \frac{0}{0}$$

Son iguales los vectores $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{BC}$.

4) El área del paralelogramo $ABCO$ es el módulo del producto vectorial de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AO}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AO} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-1,1)$$



$$\text{Área } ABCO = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AO}\right| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \boxed{\sqrt{3}\, u^2}$$

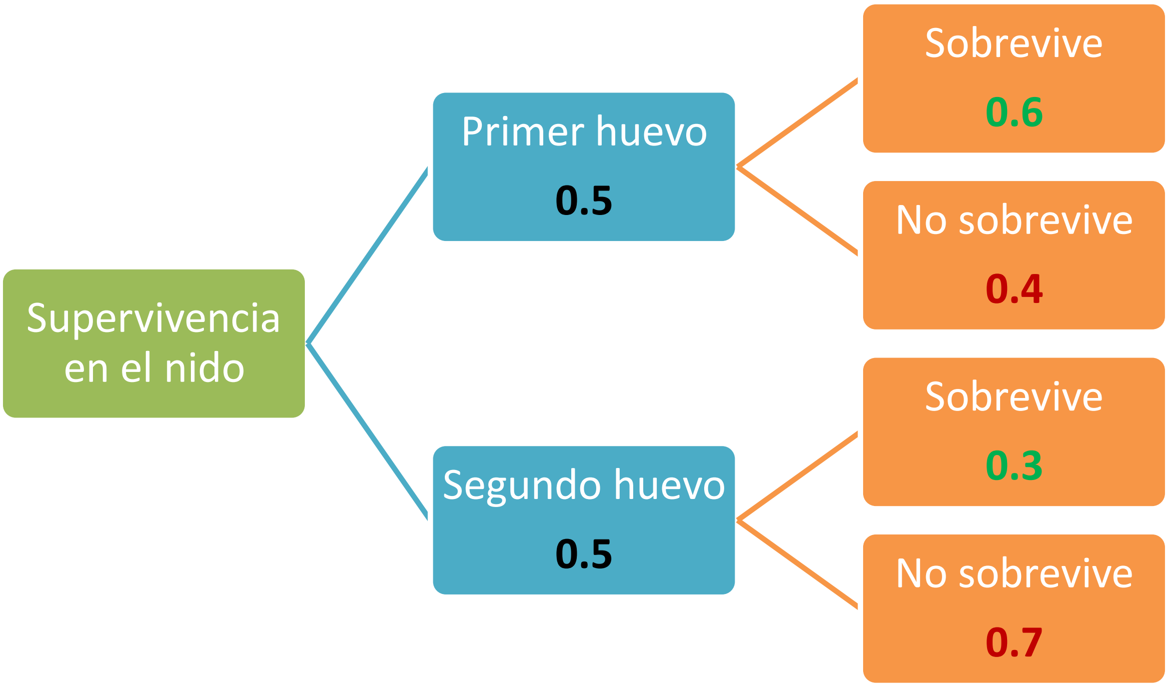
Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Una determinada especie de aves siempre pone dos huevos, pero a la madre solo le es posible alimentar a un polluelo, el más fuerte de los dos. El polluelo del huevo que primero eclosiona tiene un 60% de probabilidad de ser el superviviente, mientras que el polluelo del huevo que eclosiona en segundo lugar tiene una probabilidad de sobrevivir del 30%.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un polluelo cualquiera sea el superviviente, si no sabemos si eclosionó en primer lugar o en segundo lugar su huevo.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un ave adulta de dicha especie proceda de un huevo eclosionado en segundo lugar.

Suponemos que hay una probabilidad del 50 % de nacer en primer o segundo lugar.



Llamamos H1 = "Ser el primer huevo", H2 = "Ser el segundo huevo".

S = Sobrevivir, $\overline{S}$ =No sobrevivir

1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total

$$P(Sobrevivir) = P(S) = P(H1)P(S/H1) + P(H2)P(S/H2) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.3 = \boxed{0.45 = 45\ \%}$$

2) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(H2/S) = \frac{P(H2 \cap S)}{P(S)} = \frac{P(H2)P(S/H2)}{P(S)} = \frac{0.5 \cdot 0.3}{0.45} = \boxed{\frac{1}{3} \simeq 0.33}$$

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación matricial $XA-2X=A$, en donde $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & -2\end{pmatrix}$, siendo a una constante real.

1) [0.5 PUNTOS] Estudia el rango de A en función del parámetro a.

2) [0.25 PUNTOS] Indica para que valores se puede calcular la inversa de A.

3) [0.75 PUNTOS] Despeja X de la ecuación matricial.

4) [1 PUNTO] Calcula X para a = 2.

1) El rango de A puede ser 2, 1 o 0.
   Calculamos su determinante para saber cuando es 2 su rango.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ a & -2\end{vmatrix}=-4+a$$

$$|A|=0\Rightarrow -4+a=0\Rightarrow a=4$$

Cuando a es distinto de 4 el determinante es no nulo y el rango de A es 2.

Cuando a = 4 estudiamos el rango de A.

$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$. El rango es 1 pues hay un elemento no nulo.

2) La inversa de A existe cuando su determinante es no nulo y por lo visto antes ocurre cuando "a" es distinto de 4.

3) $XA-2X=A\Rightarrow X(A-2I)=A$

$$A-2I=\begin{pmatrix}2 & -1\\ a & -2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ a & -4\end{pmatrix}$$

$$|A-2I|=\begin{vmatrix}0 & -1\\ a & -4\end{vmatrix}=a$$

Si $a\neq 0$ existe la inversa de $A-2\,I$ y puedo seguir despejando en la ecuación matricial.

$$XA-2X=A\Rightarrow X(A-2I)=A\Rightarrow \boxed{X=A(A-2I)^{-1}}$$

Si a = 0 entonces $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ y $A-2I=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & -4\end{pmatrix}$, lo sustituimos en la ecuación e intentamos despejar.

$$\left.\begin{array}{l} XA-2X=A\Rightarrow X(A-2I)=A\\ X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}0=2\\ ..\\ ..\end{array}\right.$$

¡Imposible!

4) Para a = 2 existe la inversa de $A-2I$. Nos queda $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, $A-2I=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -4\end{pmatrix}$

Calculamos la inversa de $A-2I$.

$$|A-2I| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$(A-2I)^{-1} = \frac{Adj\left((A-2I)^T\right)}{|A-2I|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Usamos la inversa hallada para el cálculo de X.

$$X = A(A-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]
Considera la función $f(x) = -x^2 + 4x$.

1) [0.25 PUNTOS] Calcula la derivada de $f(x)$.

2) [0.75 PUNTOS] Halla los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de $f(x)$.

3) [0.5 PUNTOS] Calcula una primitiva de $f(x)$.

4) [1 PUNTO] Calcula el área del recinto limitado por $f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 3$ y el eje OX de abscisas.

1) $f(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -2x + 4$

2) $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 2$.

- En $(-\infty, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -0 + 4 = 4 > 0$. La función crece en $(-\infty, 2)$.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = -6 + 4 = -2 < 0$. La función decrece en $(2, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 2)$ y decrece en $(2, +\infty)$.

3) Calculamos la integral de $f(x)$.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int -x^2 + 4xdx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + K$$

Si reemplazamos K por el valor 0 tendremos una primitiva de la función $f(x)$ como $F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2$

4) Vemos cuando la función corta el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 4x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Ninguno de los valores de corte están en el intervalo (1, 3) por lo que el área del recinto limitado por $f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 3$ y el eje OX de abscisas se calcula con la integral definida entre $x = 1$ y $x = 3$ de $f(x)$.

$$Área = \left| \int_1^3 -x^2 + 4xdx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_1^3 \right| = \left| \left[-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 2 \right] \right| = \boxed{\frac{22}{3} \simeq 7.33u^2}$$

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos A = (2, 1, 5), B = (3, 4, 1) y la recta $r = \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = 4-3\lambda \\ z = 1-4\lambda \end{cases}$

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta, r', que pase por A y B

2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de las rectas r y r'.

3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo de vértices A, B y el origen de coordenadas.

1) La recta que pasa por A y B tiene como vector director $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_{r'}} = \overrightarrow{AB} = (3,4,1)-(2,1,5) = (1,3,-4) \\ A(2,1,5) \in r' \end{array}\right\} \Rightarrow r' \equiv \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 1+3\alpha \\ z = 5-4\alpha \end{cases}$$

2) Comparamos los vectores directores de ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{l} r = \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = 4-3\lambda \\ z = 1-4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,-3,-4) \\ B(3,4,1) \in r \end{cases} \\ \\ r' \equiv \begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = 1+3\alpha \\ z = 5-4\alpha \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_{r'}} = (1,3,-4) \\ A(2,1,5) \in r' \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{-3}{3} \neq \frac{-4}{-4}$$

Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.
Como la recta r pasa por el punto B y la recta r´ también, pues la hemos hallado para que pase por B, ambas rectas se cortan en el punto B(3, 4, 1).

Las rectas r y $r´$ se cortan en el punto B.

3) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AO}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,3,-4) \\ \overrightarrow{AO} = (0,0,0)-(2,1,5) = (-2,-1,-5) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Área } ABO = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AO}\right|}{2} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\text{Área } ABO = \frac{1}{2}\left|(-19,13,5)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-19)^2+13^2+5^2} = \boxed{\frac{\sqrt{555}}{2} \simeq 11.77\, u^2}$$

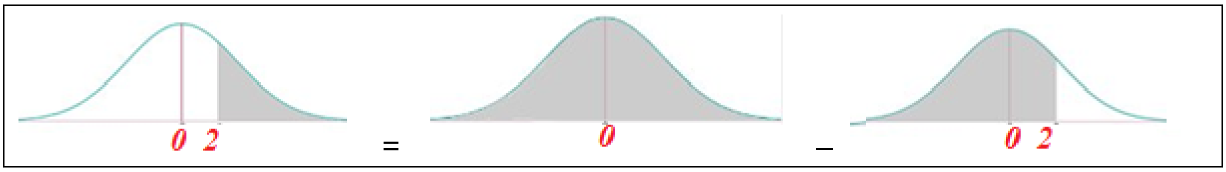
Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]
En una determinada población de adultos sanos, la concentración media de colesterol en sangre sigue una distribución normal con media 190 mg/dl y desviación típica 30 mg/dl. Un nivel elevado de colesterol puede indicar posibles problemas de salud.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que un adulto sano de la población tenga un nivel de colesterol superior a 250 mg/dl.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula qué nivel de colesterol solo superan el 1% de adultos sanos de dicha población.

X = Concentración de colesterol en sangre medida en mg/dl.
X = N(190, 30)

1) $P(X>250)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\dfrac{250-190}{30}\right)=P(Z>2)=\ldots$



$$\ldots=1-P(Z<2)=\{\text{Miro en la tabla N}(0,1)\}=1-0.9772=\boxed{0.0228}$$

2) Llamamos "a" al nivel de colesterol para el cual $P(X>a)=\dfrac{1}{100}=0.01$.

$$P(X>a)=0.01\Rightarrow P\left(Z>\frac{a-190}{30}\right)=0.01\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-P\left(Z\le\frac{a-190}{30}\right)=0.01\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a-190}{30}\right)=0.99\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{\text{Miro en la tabla N}(0,1)\}\Rightarrow\frac{a-190}{30}=2.325\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-190=69.75\Rightarrow\boxed{a=259.75}$$

El nivel de colesterol debería ser 260 mg/dl

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.0
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.51
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.55
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.59
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.63
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.67
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.70
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.73
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.77
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.79
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.82
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.85
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.87
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.89
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.90
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.92
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.93
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.94
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.95
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.96
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.97
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.97
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.98
2.2	.9861	.9864	[illegible]	[illegible]	.98
2.3	[illegible]	[illegible]	.9898	.9901	.99
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.99
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.99