UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2017

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Consideremos la igualdad matricial A · M = B, donde $A=\begin{pmatrix} t & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

1) [0,25 PUNTOS] ¿Cuantas filas y columnas debe tener la matriz *M*?

2) [1,5 PUNTOS] ¿Para qué valores de *t* es la matriz *A* invertible?

3) [1,5 PUNTOS] En el caso $t = -1$, despeje la matriz *M* en función de las matrices *A* y *B* y calcule su valor.

Ejercicio 2

Sea la función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule la primitiva de *f*. Compruebe la solución obtenida.

2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por *f* y el eje $y=0$ y las rectas $x=0$ y $x=4$.

Ejercicio 3

Sea *P* el punto (0, 2, 2). Sea *r* la recta expresada de forma continua:

$$r:\frac{x-2}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$$

1) [0,75 PUNTOS] Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta *r*.

2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia de *P* a *r*.

3) [1 PUNTO] Calcule un plano perpendicular a *r* que pase por el punto *P*.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Considere el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

1) [2 PUNTOS] Determine los valores de a para que el sistema sea compatible.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso en el que sea compatible indeterminado y en el caso $a=3$.

Ejercicio 2

Tenemos la función definida a trozos:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & si \quad x < 0 \\ 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1) [2 PUNTOS] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función g en $\mathbb{R} - \{0\}$ y determine los máximos y mínimos relativos.

2) [0,5 PUNTOS] Determine si la función es continua en $x = 0$.

3) [1 PUNTO] Haga un esbozo del gráfico de la función en un entorno de $x = 0$.

Ejercicio 3

Sean A = (−2, 1, 0), B = (1, 1, 1), C = (2, 0, 2) tres puntos de $\mathbb{R}^3$.

1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano que pasa por A, B y C.

2) [1 PUNTO] Calcule la ecuación continua de la recta $\overline{BC}$.

3) [1 PUNTO] Calcule el área del triángulo definido por ABC.

4) [0,25 PUNTOS] Determine, usando el producto escalar, si los vectores $u = \overrightarrow{(3,\ 0,\ 1)}$ y $v = \overrightarrow{(4,\ -1,\ 2)}$ son ortogonales.

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Consideremos la igualdad matricial A · M = B, donde $A=\begin{pmatrix} t & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

1) [0,25 PUNTOS] ¿Cuantas filas y columnas debe tener la matriz *M*?

2) [1,5 PUNTOS] ¿Para qué valores de *t* es la matriz *A* invertible?

3) [1,5 PUNTOS] En el caso $t = -1$, despeje la matriz *M* en función de las matrices *A* y *B* y calcule su valor.

1) Para que sea posible el producto de la matriz A por la matriz M debe ser el número de filas de M igual que el número de columnas de A (3). Y el número de columnas de M debe ser igual al de columnas de B (2).
Debe ser de dimensión 3x2.

$$\left.\begin{array}{ccc} A\cdot M & = & B \\ 3\times\boxed{3\cdot m}\times n & \to & 3\times 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$$

2) Para que A sea invertible debe tener determinante no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} t & 2t & 2 \\ -1 & t & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=t^2-2t-2+2t+2t-t=t^2+t-2$$

$$|A|=0\Rightarrow t^2+t-2=0\Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} \frac{-1+3}{2}=1=t \\ \frac{-1-3}{2}=-2=t \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando $t\neq -2 \ y \ t\neq 1$

3) Para $t = -1$ la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+2-2-2-2+1=-2\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}}{-2}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación matricial, sustituimos los valores de las matrices y calculamos.

$$A\cdot M \ = \ B \Rightarrow M = A^{-1}\cdot B$$

$$M=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -2 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-2+0+0 & 6+4+0\\ 0+0+2 & 0+1-2\\ -2+0+2 & 6+3-2\end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 10\\ 2 & -1\\ 0 & 7\end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}2/2 & -10/2\\ -2/2 & 1/2\\ 0 & -7/2\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{M=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 1/2\\ 0 & -7/2\end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2

Sea la función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule la primitiva de f. Compruebe la solución obtenida.

2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por f y el eje $y=0$ y las rectas $x=0$ y $x=4$.

1)

$$\int f(x)dx=\int\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ 1+x=t^2\Rightarrow dx=2tdt\\ x=t^2-1\end{array}\right\}=\int\frac{t^2-1}{t}2tdt=\int\frac{t^2}{t}2tdt-\int\frac{1}{t}2tdt=$$

$$=\int 2t^2dt-\int 2dt=2\int t^2dt-2\int dt=2\frac{t^3}{3}-2t=\left\{\begin{array}{l}\text{Deshacemos el cambio}\\ t^2=1+x\Rightarrow t=\sqrt{1+x}\end{array}\right\}=$$

$$=\boxed{\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3-2\sqrt{1+x}+K}$$

Comprobación: Derivamos la primitiva y debemos obtener la función inicial.

$$\left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3-2\sqrt{1+x}+K\right)'=\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cancel{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^2\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x}}-\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+x}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{1+x}}}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-1}{\sqrt{1+x}}=\frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}}=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$$

Queda demostrado que la primitiva es correcta.

2) Averiguamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}\\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow 0=\frac{x}{\sqrt{1+x}}\Rightarrow x=0$$

Comprobamos si la función es positiva o negativa entre $x=0$ y $x=4$.

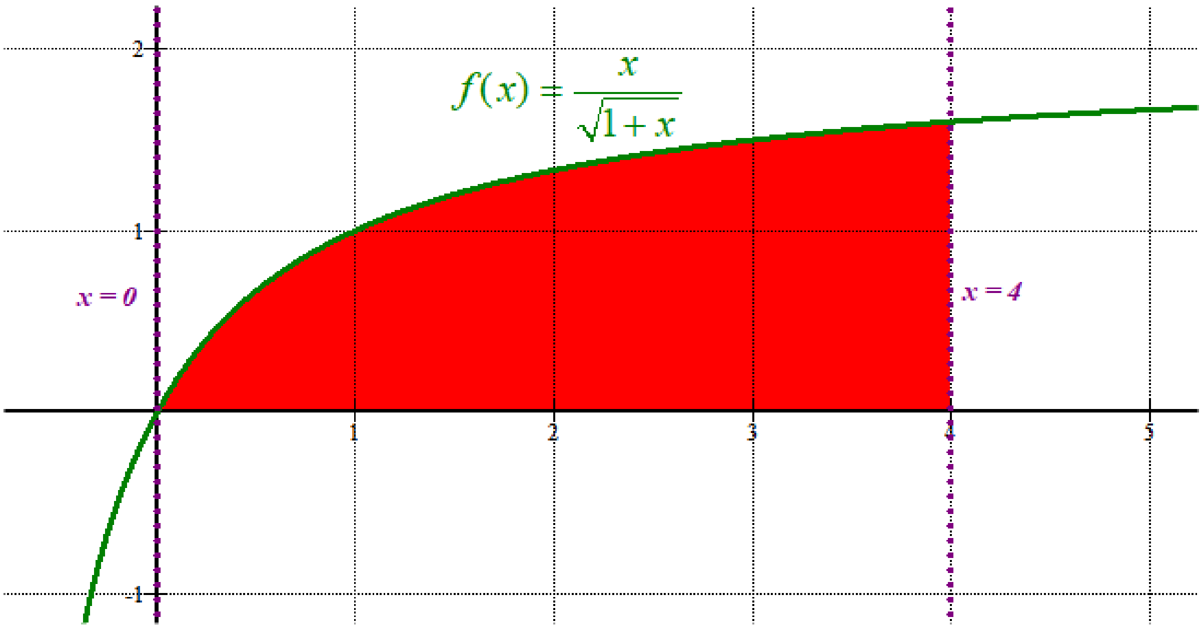
Le damos un valor intermedio $x = 2$ → $f(2)=\dfrac{2}{\sqrt{1+2}}>0$

El área del recinto es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 4.

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3 - 2\sqrt{1+x}\right]_0^4 =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+4}\right)^3 - 2\sqrt{1+4}\right] - \left[\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+0}\right)^3 - 2\sqrt{1+0}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{5}\right)^3 - \frac{6}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{3} + 2 = \frac{2}{3}5\sqrt{5} - \frac{6}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{3} + 2 = \boxed{\frac{4}{3}\sqrt{5} + \frac{4}{3} = 4,314\,u^2}$$



En el dibujo de la gráfica y el recinto pedido (de rojo) se observa la bondad de la solución obtenida para el área. Contando cuadraditos vemos que aproximadamente el área es 4 y pico unidades cuadradas.

Ejercicio 3

Sea P el punto (0, 2, 2). Sea r la recta expresada de forma continua:

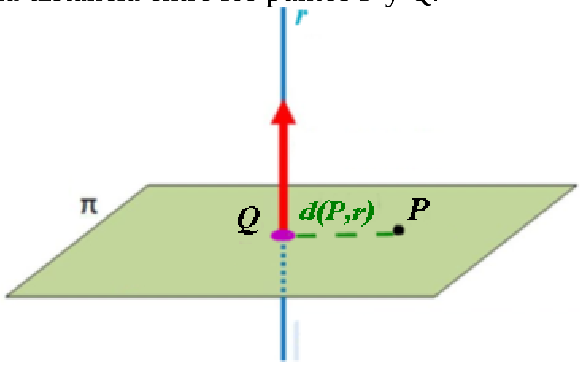
$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$

1) [0,75 PUNTOS] Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta r.
2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia de P a r.
3) [1 PUNTO] Calcule un plano perpendicular a r que pase por el punto P.

1)

$$r: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow r: \begin{cases} P_r(2,0,-1) \in r \\ \overrightarrow{v_r} = (4,1,2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2+4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases}$$

2) Hallamos el plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto P.
Luego determinamos el punto Q donde se cortan recta y plano. La distancia del punto P a la recta r será el valor de la distancia entre los puntos P y Q.



El plano tendrá como vector normal el director de r.

$$\pi: \begin{cases} P(0,2,2) \in \pi \\ \vec{n} = \overrightarrow{v_r} = (4,1,2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(0,2,2) \in \pi \\ 4x+y+2z+D=0 \end{cases} \Rightarrow 0+2+4+D=0 \Rightarrow D=-6$$

$$\pi: 4x+y+2z-6=0$$

Averiguamos las coordenadas del punto Q de corte de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 4x+y+2z-6=0 \\ r: \begin{cases} x = 2+4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 4(2+4\lambda)+\lambda+2(-1+2\lambda)-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8+16\lambda+\lambda-2+4\lambda-6=0 \Rightarrow 21\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow Q(2,0,-1)$$

Obtenemos el valor de la distancia de P a r usando el módulo del vector que une P con Q.

$$\overrightarrow{PQ} = (2,0,-1)-(0,2,2) = (2,-2,-3) \Rightarrow d(P,r) = d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$$

$$d(P,r) = \sqrt{2^2+(-2)^2+(-3)^2} = \boxed{\sqrt{17} = 4,12\, u}$$

3) Determinado en el apartado anterior: $\pi: 4x+y+2z-6=0$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Considere el sistema matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

1) [2 PUNTOS] Determine los valores de *a* para que el sistema sea compatible.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso en el que sea compatible indeterminado y en el caso *a=3*.

Para que sea compatible debe tener rango de la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{pmatrix}$

igual que el rango de la ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ 3a & 2a & 2a & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 3a & 2a & 2a \end{vmatrix} = 2a + 3a^2 + 2a - 3a - 2a - 2a^2 = a^2 - a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Distinguimos tres situaciones diferentes.

Situación 1ª. $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, asi como el rango de A/B y el número de incógnitas, por lo que **el sistema es compatible determinado**.

Situación 2ª. *a = 0.*

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y su rango es 2 pues quitando la fila 3ª (todo ceros) y la columna 1ª (igual que la 2ª) tenemos un menor de orden 2 con determinante no nulo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\1&1&0&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna (igual que la 2ª) y su determinante vale

$\begin{vmatrix}1&1&2\\1&0&2\\0&0&1\end{vmatrix}=0+0+0-0-1-0=-1\neq 0$. El rango de A/B es 3.

El sistema es incompatible pues rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B.

Situación 3ª. *a = 1*.

En este caso planteamos la discusión usando el método de Gauss.

La matriz ampliada queda

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\1&1&1&2\\3&2&2&1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\text{Fila }2^{a}-\text{Fila }1^{a}&&&\\ 1&1&1&2\\-1&-1&-1&-2\\ \hline 0&0&0&0\to\text{Nueva fila }2^{a}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc}\text{Fila }3^{a}-3\cdot\text{Fila }1^{a}&&&\\ 3&2&2&1\\-3&-3&-3&-6\\ \hline 0&-1&-1&-5\to\text{Nueva fila }3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&0&0&0\\0&-1&-1&-5\end{array}\right)\Rightarrow\{\text{Cambiamos Fila }3^{a}\text{ por Fila }2^{a}\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-1&-1&-5\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Mirando las tres primeras columnas de la matriz tenemos una matriz equivalente a A y contamos 2 filas con algún elemento no nulo, por lo que el rango de A es 2. Y mirando la matriz completa equivalente a la matriz A/B contamos 2 filas con algún elemento no nulo, por lo que el rango de A/B es 2.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = Número de incógnitas.

El sistema es compatible indeterminado.

1) El sistema es compatible para a ≠ 0.
2) El sistema es compatible indeterminado para *a = 1*. Lo resolvemos.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\3&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=2\\x+y+z=2\\3x+2y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=2\\3x+2y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=2-y-z\\3x+2y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(2-y-z)+2y+2z=1\Rightarrow 6-3y-3z+2y+2z=1\Rightarrow -y-z=-5\Rightarrow\boxed{5-z=y}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2-(5-z)-z=2-5+z-z=-3$$

$Solución: x=-3;\ y=5-t;\ z=t$

Ahora para *a=3* el sistema es compatible determinado y podemos resolverlo por el método de Cramer.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{12+3+12-1-12-36}{6+27+6-9-6-18} = \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{12+54+1-18-12-3}{6} = \frac{34}{6} = \frac{17}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{1+18+12-18-1-12}{6} = \frac{0}{6} = 0$$

La solución para *a = 3* es *x = –11/3*; *y = 17/3*; *z = 0*.

Ejercicio 2

Tenemos la función definida a trozos:

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & si \quad x<0 \\ 2x^3-15x^2+36x+3 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

1) [2 PUNTOS] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función g en $\mathbb{R}-\{0\}$ y determine los máximos y mínimos relativos.

2) [0,5 PUNTOS] Determine si la función es continua en $x = 0$.

3) [1 PUNTO] Haga un esbozo del gráfico de la función en un entorno de $x = 0$.

1) Calculamos la derivada de la función en el intervalo $(-\infty, 0)$ y estudiamos su evolución.

$$g(x)=\frac{x+1}{x}\Rightarrow g\,'(x)=\frac{x-(x+1)}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$$

$$g\,'(x)=0\Rightarrow\frac{-1}{x^2}=0\Rightarrow -1=0 \quad \text{¡¡Imposible!!}$$

La derivada de la función no se anula en este intervalo por lo que siempre es creciente o siempre decreciente.

Tomamos $x = -1$ y la derivada vale $g\,'(-1)=\frac{-1}{(-1)^2}=-1<0$. La función decrece en este punto y por tanto en todo el intervalo $(-\infty, 0)$.

Calculamos la derivada de la función en el intervalo $(0, +\infty)$ y estudiamos su evolución.

$$g(x)=2x^3-15x^2+36x+3\Rightarrow g\,'(x)=6x^2-30x+36$$

$$g\,'(x)=0\Rightarrow 6x^2-30x+36=0\Rightarrow x^2-5x+6=0\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases}\dfrac{5+1}{2}=3=x\\ \dfrac{5-1}{2}=2=x\end{cases}$$

Veamos si la función crece o decrece antes de $x = 2$, entre 2 y 3, y, por último, después de 3.

- En $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $g\,'(1)=6-30+36=12>0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En $(2, 3)$ tomamos $x = 2{,}5$ y la derivada vale $g\,'(2{,}5)=6\cdot 2{,}5^2-30\cdot 2{,}5+36=-1{,}5<0$. La función decrece en $(2, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $g\,'(4)=6\cdot 4^2-30\cdot 4+36=12>0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

Reuniendo todo lo observado, tenemos un resumen en el siguiente gráfico.

Para saber si la función presenta un mínimo en $x = 0$ debemos estudiar el comportamiento de la función en su entorno, pues no sabemos si es continua.

¿Es continua en $x = 0$?

- Existe el límite $\lim_{x\to 0} g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow$ No existe
- Existe la función. No es necesario verlo.
- Son iguales. No es necesario verlo.

No es continua en $x = 0$. En este punto no presenta mínimo.

La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (2, 3)$ y crece en $(0, 2) \cup (3, +\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 3$. Y un máximo relativo en $x = 2$.

2) Visto en el anterior apartado.
¿Es continua en $x = 0$?

- Existe el límite $\lim_{x\to 0} g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow$ No existe
- Existe la función. No es necesario verlo.
- Son iguales. No es necesario verlo.

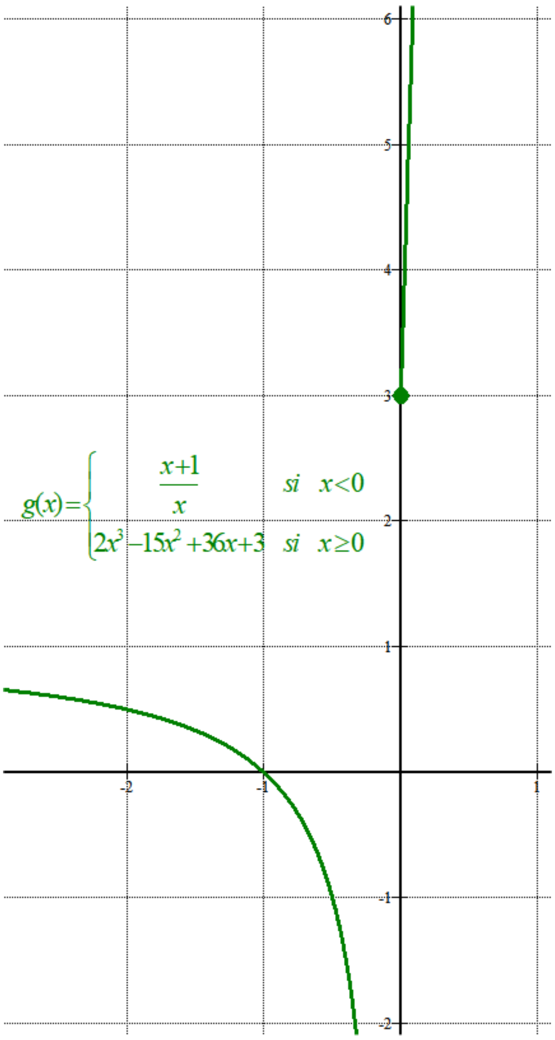
No es continua en $x = 0$.

3) Sabemos cómo se comporta la función en las proximidades de $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} 2x^3 - 15x^2 + 36x + 3 = 3 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores en el intervalo [–2, 2] y dibujamos su gráfico.

x	$g(x)$
-2	$0,5$
-1	0
$-0,5$	-1
$-0,1$	-9
0	3
2	29



Ejercicio 3
Sean A = (−2, 1, 0), B = (1, 1, 1), C = (2, 0, 2) tres puntos de $\mathbb{R}^3$.
1) [1 PUNTO] Calcule la ecuación implícita (general) del plano que pasa por A, B y C.
2) [1 PUNTO] Calcule la ecuación continua de la recta $\overline{BC}$.
3) [1 PUNTO] Calcule el área del triángulo definido por ABC.
4) [0,25 PUNTOS] Determine, usando el producto escalar, si los vectores $u = \overrightarrow{(3,\ 0,\ 1)}$ y $v = \overrightarrow{(4,\ -1,\ 2)}$ son ortogonales.

1) Hallamos dos vectores directores del plano y determinamos su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} B(1,1,1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (-2,1,0) = (3,0,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2,0,2) - (-2,1,0) = (4,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$4(y-1) - 3(z-1) - 6(y-1) + (x-1) = 0$$
$$4y - 4 - 3z + 3 - 6y + 6 + x - 1 = 0$$
$$\boxed{\pi \equiv x - 2y - 3z + 4 = 0}$$

2) Hallamos su vector director y determinamos su ecuación continua.

$$\left.\begin{array}{l} B(1,1,1) \in r \\ \vec{u} = \overrightarrow{BC} = (2,0,2) - (1,1,1) = (1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}}$$

3) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores AB y AC.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,1,1) - (-2,1,0) = (3,0,1) \\ \overrightarrow{AC} = (2,0,2) - (-2,1,0) = (4,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 4j - 3k - 6j + i = i - 2j - 3k = (1,-2,-3)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2} = 1{,}871\, u^2}$$

4) Para que los vectores sean ortogonales su producto escalar debe ser cero.

$$u \cdot v = \overrightarrow{(3,\ 0,\ 1)} \cdot \overrightarrow{(4,\ -1,\ 2)} = 12 + 0 + 2 = 14 \neq 0$$

Por lo que no son ortogonales dichos vectores.