Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2018
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. *En una nave industrial se realiza el montaje de dos tipos de bicicletas: de paseo y de montaña. Para cada jornada de trabajo tenemos las siguientes restricciones: El número de bicicletas de paseo montadas debe estar entre 1 y 2. El número de bicicletas de montaña montadas debe estar entre 3 y 6. Si al triple de bicicletas de paseo montadas sumamos el número de bicicletas de montaña montadas, el resultado debe ser al menos 9.*

El montaje de una bicicleta de paseo precisa una hora, mientras que el de una bicicleta de montaña necesita dos horas. Pretendemos cumplir todas las condiciones expuestas en un tiempo mínimo. Para ello se pide:

a) Expresa la función objetivo. (0.25 ptos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.5 ptos)

c) Halla el número de bicicletas de cada clase que se deben montar para que se cumplan todas las condiciones en un tiempo mínimo, y calcula cuál será ese tiempo mínimo. (0.75 ptos)

2. *Las acciones de tres empresas, A, B y C, tienen los siguientes valores:*

Empresa A: 20 euros por acción; Empresa B: 25 euros por acción; Empresa C: 40 euros por acción.

Hemos gastado 7000 euros en comprar acciones de estas tres empresas. Las acciones compradas de la empresa A son la mitad de la suma de las compradas de B y C. En total hemos comprado 255 acciones, exclusivamente de estas tres empresas.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas acciones hemos comprado de cada empresa. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} 4x - t & si\ x \leq 1 \\ (x-2)^2 + t & si\ x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t *la función* $f(x)$ *es continua en* $x = 1$*? (0.5 ptos)*

b) Para $t = 0$*, representa gráficamente la función* f*. (1 pto)*

4. *De la función* $G(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ *sabemos que tiene un punto de inflexión en (2, - 44) y un mínimo relativo en el punto de abscisa (x=6). Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c (1.5 ptos).*

5. *En un municipio el 40 % de los habitantes son aficionados a la lectura, el 50 % al cine, y al 70 % les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.*

a) Se elige un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine? (0.75 ptos)

b) Si elegimos un habitante al azar y le gusta el cine, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura? (0.75 ptos)

6. *Se desea investigar la resistencia en* Kg/cm^2 *de cierto material suministrado por un proveedor, se sabe que esa resistencia sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica* σ *=15* Kg/cm^2*. Se tomó una muestra aleatoria de 400 elementos de ese material y se comprobó que la resistencia media de dicha muestra era de 110* Kg/cm^2*.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la resistencia de ese material, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 ptos)

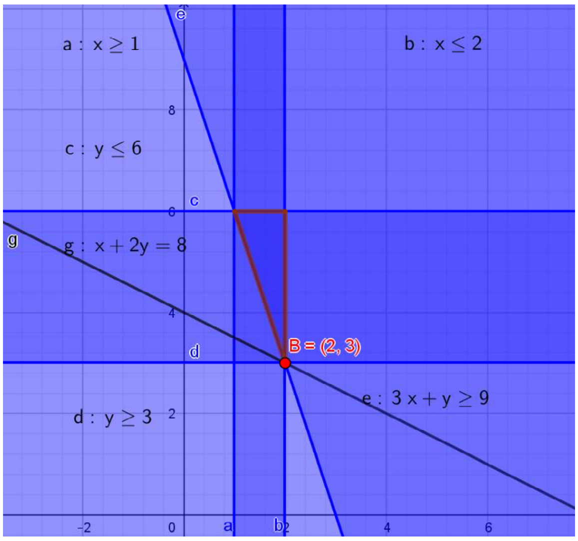
c) ¿Se puede admitir que la media de resistencia μ *del material pueda ser de 111* kg/cm^2 *con una confianza del 95 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

A1.- Solución:

P=número de bicicletas de paseo. M=número de bicicletas de montaña.

$$\begin{cases} a) T(P,M) = P + 2M \ horas \Rightarrow T(mínimo) = 2 + 6 = 8 \ horas \\ Restricciones \ b) \begin{cases} 1 \leq P \leq 2 \\ 3 \leq M \leq 6 \\ 3P + M \geq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = 2 \ bicicletas \\ M = 3 \ bicicletas \end{cases} \\ c) \ 2 \ bicicletas \ de \ paseo \ y \ 3 \ de \ montaña, 8 \ horas \end{cases}$$



A2.- Solución:

Llamaremos A al nº de acciones compradas de la empresa A. B al nº de acciones.... C al nº ....

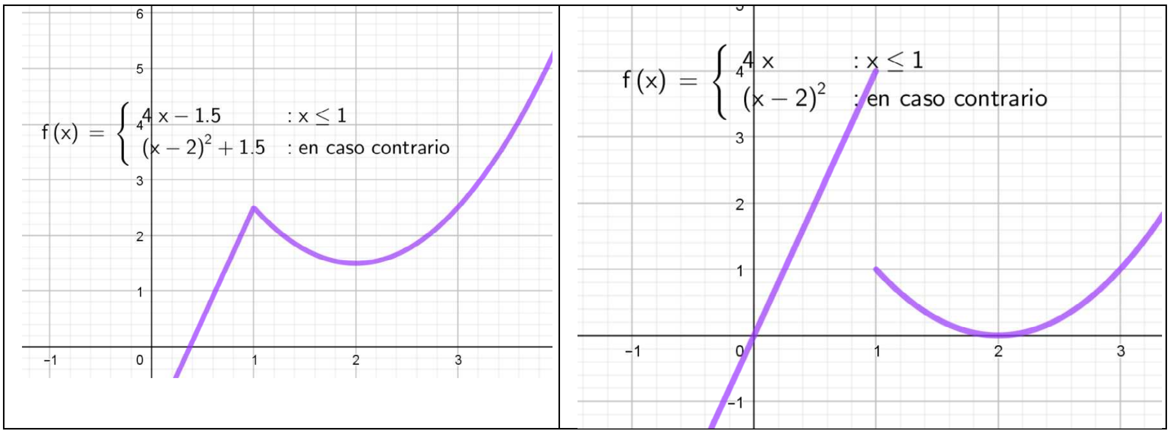
$$\begin{cases} 20A + 25B + 40C = 7000 \\ A = \dfrac{B + C}{2} \\ A + B + C = 255 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4A + 5B + 8C = 1400 \\ 2A - B - C = 0 \\ A + B + C = 255 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2^{a} + 3^{a} \\ 3A = 255 \Rightarrow \mathbf{A} = 85 \\ Sustituimos \ en \ 1^{a} y 3^{a} \\ 5B + 8C = 1060 \\ B + C = 170 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{5B + 8C = 1060} \\ \mathbf{-5B - 5C = -850} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{C = 70} \\ \mathbf{B = 100} \end{cases}$$

A3.- Solución:

$$a)f(x)=\begin{cases} \boldsymbol{4x-t\ si\ x\leq 1} \\ (\boldsymbol{x-2})^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{t\ si\ x}>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{f(1)=4-t} \\ \lim_{x\to 1^-} \boldsymbol{4x-t=4-t} \\ \lim_{x\to 1^+} (\boldsymbol{x-2})^{\boldsymbol{2}}+\boldsymbol{t=1+t} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{4-t=1+t} \Rightarrow \boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}$$

$$b)f(x)=\begin{cases} \boldsymbol{4x\ \ si\ x\leq 1} \quad \boldsymbol{una\ semirecta} \\ (\boldsymbol{x-2})^{\boldsymbol{2}}\ \ \boldsymbol{si\ x}>1\ \boldsymbol{una\ rama\ de\ par\acute{a}bola\ con\ v\acute{e}rtice\ en}\ (\boldsymbol{2,0}) \end{cases}$$

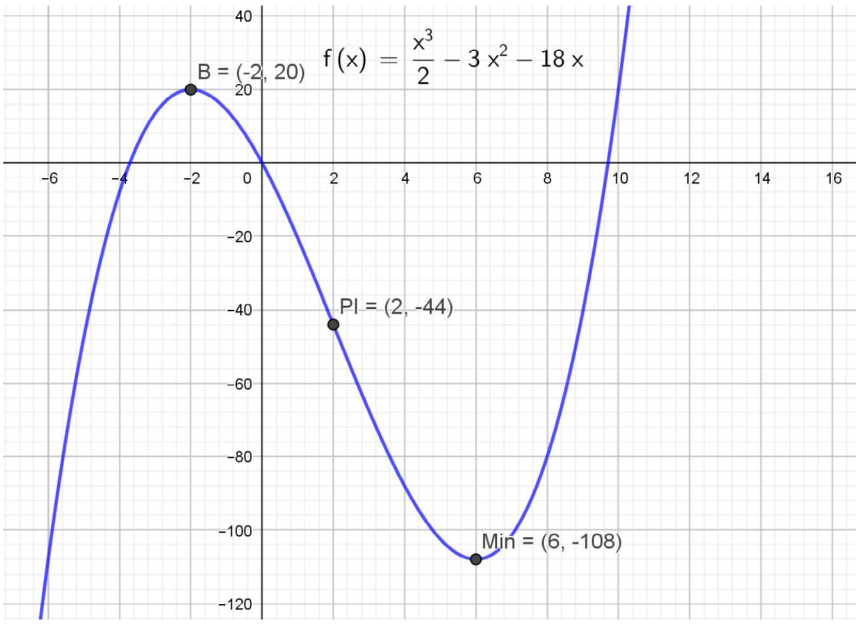


A4.- Solución:

$$\begin{cases} G(x) = ax^3 + bx^2 + cx \\ G'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \\ G''(x) = 6ax + 2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} PI(2,-44) \Rightarrow 8a + 4b + 2c = -44 \\ G'(6) = 0 \Rightarrow 108a + 12b + c = 0 \\ PI(2,-44) \Rightarrow G''(2) = 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{\underline{a}} - 1^{\underline{a}}/2 \\ 104a + 10b = 22 \\ 3^{\underline{a}}\dfrac{1}{2} \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 104a + 10b = 22 \\ -60a - 10b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -3 \\ c = -18 \end{cases}$$



A5.- Solución:

L=Elegido un habitante al azar resulta que le gusta la lectura, M=....le gusta el cine

$$a)\ P(L \cap C) = P(L) + P(C) - P(L \cup C) = 40\% + 50\% - 70\% = 20\%$$

$$b)\ P\left(L/_C\right) = \frac{P(L \cap C)}{P(C)} = \frac{20\%}{50\%} = 40\%$$

A6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$, donde 1-$\alpha$ es el nivel de confianza (0,95 en nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, en nuestro caso 110; σ la desviación típica, ahora 15; n el tamaño de la muestra, 400.

$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$ ya que $(1-0{,}025 = 0{,}975)$ Ver tabla

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(110 - 1'96\frac{15}{\sqrt{400}}, 110 + 1'96\frac{15}{\sqrt{400}}\right) = (108'53\,, 111'47)$$

b) Cuando el nivel de confianza aumenta, también aumenta $z_{\alpha/2}$ luego crece el intervalo; si el nivel de confianza disminuye, disminuye el intervalo porque $z_{\alpha/2}$ disminuye. (ver tabla)

c) Se puede admitir que μ sea 111 Kg/cm^2 porque ese valor pertenece al intervalo calculado en el apartado a).

Propuesta B

1. *a) Dada la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ *se pide que compruebes que su cuadrado coincide con su inversa, es decir:* $A^2 = A^{-1}$. *(0.75 ptos)*

b) Calcula A^3 *y* A^4. *(0.75 ptos)*

2. *Hemos gastado 7000 euros en comprar 85 acciones de la empresa A, 100 acciones de la empresa B y 70 acciones de la empresa C. El valor de una acción de la empresa C es el doble que el de una acción de la empresa A. El valor de una acción de la empresa B supera en 5 euros al de una acción de la empresa A.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor de una acción de cada una de las empresas mencionadas. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} |x| + 5t & si\ x \leq 0 \\ (x+t)^2 - 10x & si\ x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t *la función* $f(x)$ *es continua en x=0? (0.5 ptos)*

b) Para $t = 2$, *calcula los extremos relativos de la función* $f(x)$ *en el intervalo* $(0, +\infty)$. *(0.5 ptos)*

c) Para $t = 2$, *calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)$ *en* $(0, +\infty)$. *(0.5 ptos)*

4. *Cierto club de fútbol acaba de cumplir 25 años de existencia. A lo largo de este tiempo su número de socios se ha ajustado a la función:* $S(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - 54x + 180$

Donde x *está en años, con* $0 \leq x \leq 25$, *y* $S(x)$ *está en cientos de socios. Se pide:*

a) Calcula cuántos socios tiene el club en su inicio $(x = 0)$ *y cuántos en este momento* $(x = 25)$. *(0.5 ptos)*

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de socios a lo largo de estos 25 años. (0.5 ptos)

c) Determina cuándo ha tenido el club su número máximo de socios y su número mínimo de socios, y cuántos socios tuvo en cada uno de esos momentos. (0.5 ptos)

5. *En un cierto banco el 5 % de los créditos concedidos son para la compra de una motocicleta. De los créditos concedidos para la compra de una motocicleta, el 40 % resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una motocicleta, se sabe que el 10 % de ellos resultan impagados.*

a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados. (0.75 ptos)

b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para una motocicleta? (0.75 ptos)

6. *Una empresa quiere estudiar cada cuánto tiempo los clientes vuelven a comprar ropa de su marca, sabe que el tiempo entre compras se distribuye según una normal de media desconocida y desviación típica* $\sigma = 4$ *días. Se tomó una muestra aleatoria de 10 clientes y se comprobó que el tiempo hasta la siguiente compra fue de 50, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 68 y 71 días respectivamente.*

a) Halla el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo entre compras de esta marca, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)

b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ *del tiempo entre compras puede ser 64 días con una probabilidad del 99 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

B1.- Solución:

Hallamos A^2 y después la multiplicamos por A. Si obtenemos la matriz unidad entonces $A^2=A^{-1}$

Y no hace falta calcular la inversa por otros métodos.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = A^{-1}$$

$$b)\ A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I, lo\ hemos\ visto\ antes$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = A$$

B2.- Solución:

Llamaremos A al valoren € de una acción de la empresa A. B al valor en € de una acción de la empresa B. y C al valor en € de una acción de la empresa C.

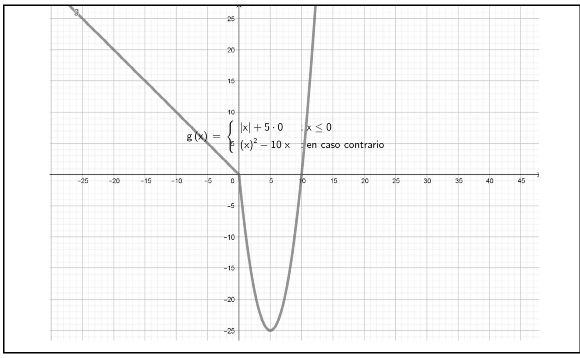
$$\begin{cases} 85A + 100B + 70C = 7000 \\ C = 2A \\ B = A + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Sustituimos\ en\ la\ 1^{a}\ la\ 2^{a}\ y\ la\ 3^{a} \\ (85 + 100 + 140)A = 6500 \\ 325A = 6500 \Rightarrow A = 20€ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Sustituimos\ en\ 2^{a} y 3^{a} \\ C = 40€ \\ B = 25€ \end{cases}$$

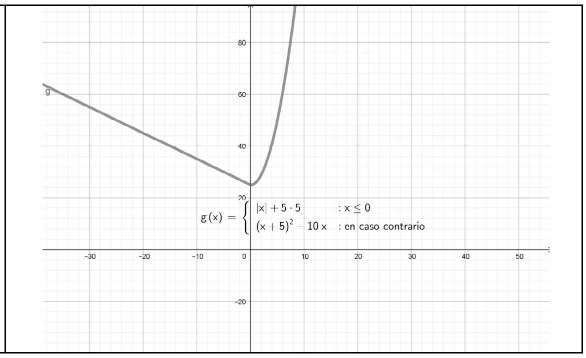
B3.- Solución:

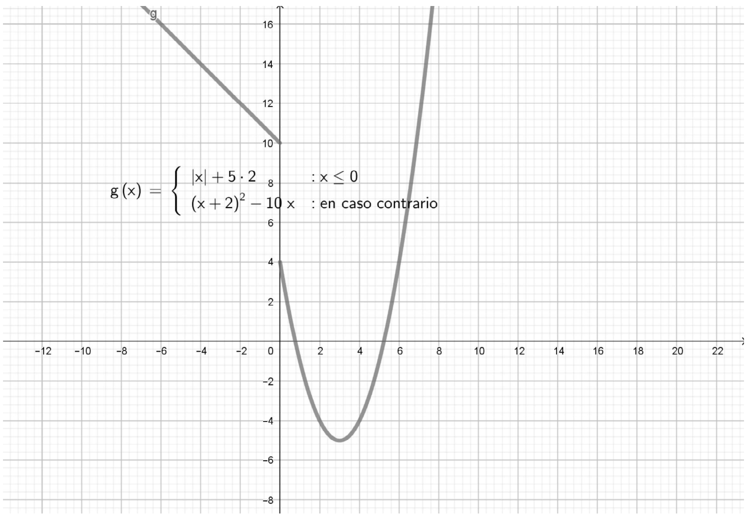
$$a)f(x)=\begin{cases}|x|+5t\ si\ x\le 0\\(x+t)^2-10x\ si\ x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=5t\\ \lim\limits_{x\to 0^-}|x|+5t=5t\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x+t)^2-10x=t^2\end{cases}\Rightarrow t^2=5t\Rightarrow\begin{cases}t=0\\t=5\end{cases}$$

$$b)t=2\ y\ x>0\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}2(x+2)-10\\f'(x)=0\Rightarrow x=3\\f''(x)=2\Rightarrow f''(3)=2>0\Rightarrow Mínimo\ en\ (3,-4)\end{cases}$$

$$c)\ f(x) es\ una\ rama\ de\ parabola\ con\ vértice\ en\ (3,-4)\Rightarrow\begin{cases}Decreciente\ en\ (0\ ,3)\\Creciente\ en\ (3\ ,+\infty)\end{cases}$$





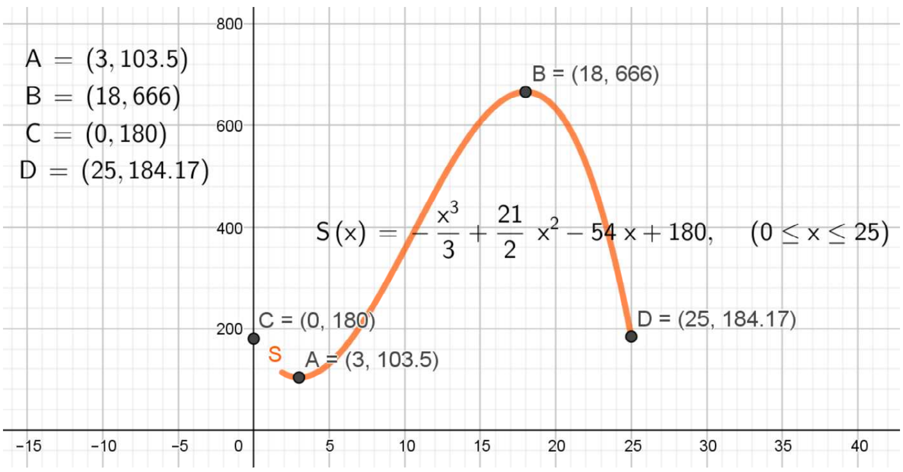


B4.- Solución:

$$\begin{cases} S(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - 54x + 180 \Rightarrow \begin{cases} S(0) = 18000\ socios \\ S(25) = 18417\ socios \end{cases} \\ S'(x) = -x^2 + 21x - 54 \\ S''(x) = -2x + 21 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 21x - 54 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 18 \end{cases} \\ S''(3) = 15 > 0 \Rightarrow Mínimo\ \big(3, S(3)\big) = \ (3 años\ , 10350\ socios) \\ S''(18) = -15 < 0 \Rightarrow Máximo\ (18, S(18) = (18\ años\ , 66600\ socios) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Decreciente\ de\ 0\ a\ 3\ años, (0, 3) \\ Creciente\ de\ 3\ a\ 18 años, (3\ , 18) \\ Decreciente\ de\ 18\ a\ 25\ años, (18, 25) \end{cases}$$



B5.- Solución:

M=Elegido un crédito al azar resulta que es para motocicleta,nM=Elegido un crédito al azar resulta que no es para motocicleta. I= Elegido un crédito al azar resulta que es impagado.

Pag= Elegido un crédito al azar resulta que no es impagado (que es pagado)

$$a)\ P(I) = P(I \cap M) + P(I \cap nM) = 5\% \cdot 40\% + 95\% \cdot 10\% = 11'50\% \Rightarrow P(Pag) = 1 - P(I) = 88'5\%$$

$$b)\ P\left({}^{M}/_{Pag}\right) = \frac{P(M \cap Pag)}{P(Pag)} = \frac{5\% \cdot 60\%}{88'5\%} = 3'39\%$$

B6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$, donde 1-α es el nivel de confianza (0,95 en nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, en nuestro caso 62; σ la desviación típica, ahora 4; n el tamaño de la muestra, 10.

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$ ya que $(1 - 0{,}025 = 0{,}975)$ Ver tabla

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(62 - 1'96\frac{4}{\sqrt{10}}, 62 + 1'96\frac{4}{\sqrt{10}}\right) = (59'52, 64'48)$$

b) Aumentando el tamaño de la muestra disminuye el radio del intervalo de confianza, porque su valor aparece en el denominador, por lo tanto disminuye la amplitud del intervalo.

c) Si aumentamos el nivel de confianza, aumenta la amplitud del intervalo (ver tabla) y como 64 pertenece al intervalo calculado al 95%, también pertenecerá al 99%.