Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Opción A

1. *Dada la matriz* $M = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *se pide:*

a) Realiza el producto $M \cdot M^t$ *(siendo* M^t *la matriz transpuesta de* M *). (0.5 ptos)*

b) Despeja X *en la siguiente expresión matricial:* $P \cdot X = M \cdot M^t$*. (0.5 ptos)*

c) Si $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *, obtén la expresión de la matriz* X *del apartado anterior. (0.5 ptos)*

2. *A través de una página de internet se han vendido hoy 320 entradas para tres eventos distintos: un estreno de cine, una función teatral y un concierto de música. El valor de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que una entrada de cine vale 8 euros, una de teatro 20 euros y una para el concierto de música vale 30 euros. El número de entradas para el concierto musical es triple que las de teatro.*

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas entradas se han vendido para cada uno de los eventos. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t *la función* $f(x)$ *es continua en* $x = 1$*? (0.5 ptos)*

b) Para $t = 0$*, calcula los extremos relativos de la función* $f(x)$ *en el intervalo* $(-\infty, 1)$*. (0.5 ptos)*

c) Para $t = 0$*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)$ *en* $(-\infty, 1)$*. (0.5 ptos)*

4. *De la función* $H(x) = a\,x^3 + b\,x + c$ *sabemos que tiene un punto de inflexión en* $(0 , \frac{2}{3})$ *y un máximo relativo en el punto* $(4 , 6)$*. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

5. *En un instituto el 45 % de los estudiantes son de la modalidad de Ciencias, el 35 % son de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales y el resto son de la modalidad de Arte. También se sabe que el 10 % de los estudiantes de Ciencias tienen una nota media superior a 8, el 20 % de los de Humanidades y Ciencias Sociales y el 25 % de los de la modalidad de Arte.*

a) Calcule la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, tenga una nota media superior a 8. (0.75 ptos)

b) Si tenemos un estudiante que tiene una nota media menor o igual a 8, ¿cuál es la probabilidad de que sea Ciencias? (0.75 ptos)

6. *Los tiempos que tardan unos corredores en recorrer 6 kilómetros sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica* σ *=10 minutos. Se eligen al azar 10 corredores y se mide el tiempo que tardan en hacer los seis kilómetros, siendo estos: 15, 19, 20, 22, 24, 25, 27, 28, 30 y 32 minutos respectivamente.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo medio que tarda los corredores en hacer los 6 kilómetros, con un nivel de confianza del 95 % (1.25 ptos)

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

A1.- Solución:

$$a)\ M=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow M\cdot M^t=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$$

$$b)\ P\cdot X=M\cdot M^t\Rightarrow P^{-1}\cdot P\cdot X=P^{-1}\cdot M\cdot M^t\Rightarrow I\cdot X=P^{-1}\cdot M\cdot M^t\Rightarrow X=P^{-1}\cdot M\cdot M^t$$

$$c)\ P=\begin{pmatrix}-2 & -2\\3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow |P|=1\Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 3\\-3 & -2\end{pmatrix}\text{transpuesta de adjuntos}$$

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}4 & 3\\-3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & 11\\-16 & -8\end{pmatrix}$$

A2.- Solución:

Llamaremos c al nº de entradas vendidas para cine, t al nº de nº de entradas vendidas para teatro, y m al nº de entradas vendidas para concierto de música.

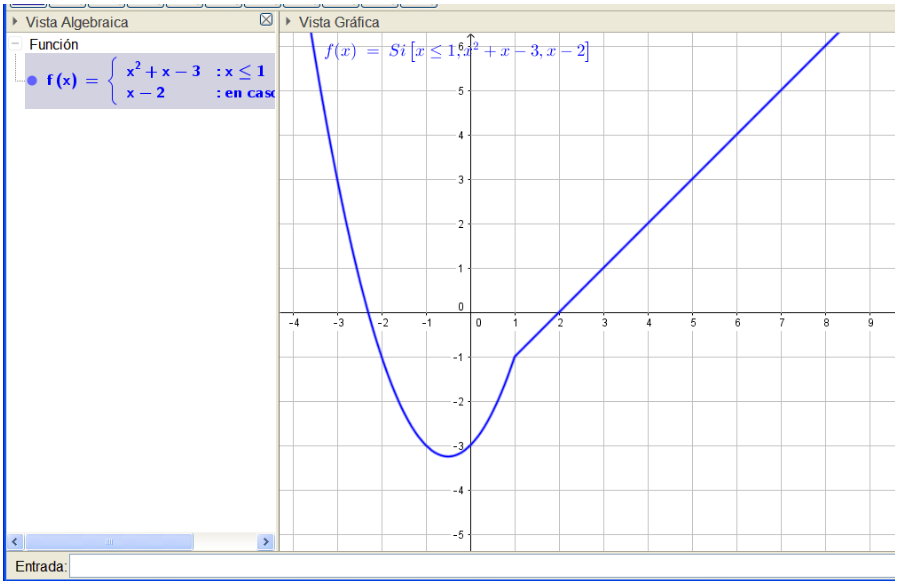
$$\begin{cases} c+t+m=320\\ 8c+20t+30m=6460\\ m=3t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3^{\text{a}}en1^{\text{a}}\ y\ 2^{\text{a}}\\ c+4t=320\\ 8c+110t=6460\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -8c-32t=-2560\\ 8c+110t=6460\\ 78t=3900\\ t=50\\ c=120\\ m=150\end{cases}$$

A3.- Solución:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x-3 \; si \; x\le 1 \\ x+t \quad si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1)=1+1-3=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x+t=1+t \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+x-3=-1 \end{cases} \Rightarrow 1+t=-1 \Rightarrow \begin{cases} t=-2 \\ \text{para continua en x} = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) Para t} = 0 \text{ extremos en } (-\infty,1), \begin{cases} f'(x)=2x+1 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1}{2} \\ f''(x)=2 \Rightarrow f''(\dfrac{-1}{2})=2>0 \end{cases} \Rightarrow \textit{Mínimo en } (\frac{-1}{2},\frac{-13}{4})$$

$$c) \text{ Creciente cuando } f'(x)>0 \Rightarrow 2x+1>0 \Rightarrow x>\frac{-1}{2}, \text{decreciente cuando x} < \frac{-1}{2}$$



A4.- Solución:

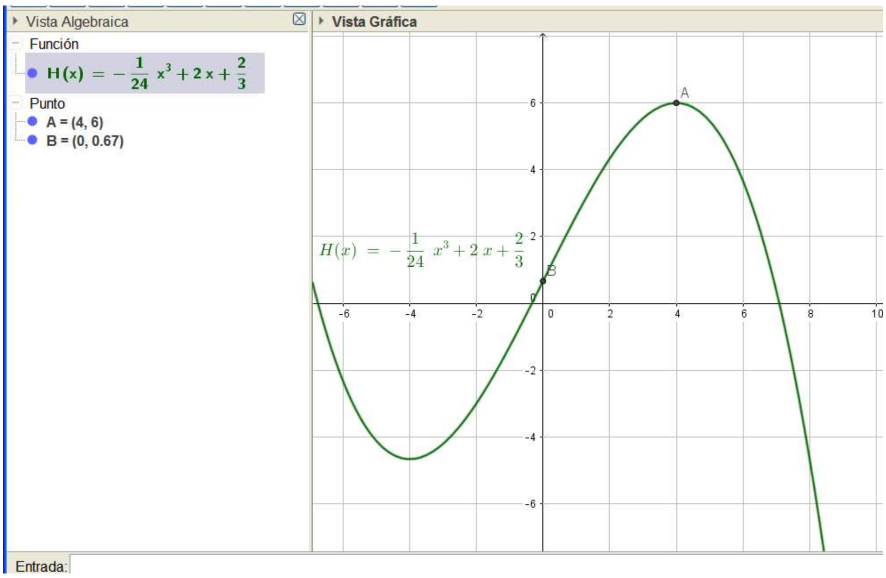
$$H(x) = ax^3 + bx + c$$

$$\begin{cases} \begin{cases} H(0) = \dfrac{2}{3} \Rightarrow c = \dfrac{2}{3} \\ H(4) = 6 \Rightarrow 64a + 4b + \dfrac{2}{3} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 64a + 4b = \dfrac{16}{3} \\ 48a + b = 0 \Rightarrow b = -48a \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} H'(x) = 3ax^2 + b \\ H'(4) = 0 \Rightarrow 48a + b = 0 \end{cases} \end{cases}$$

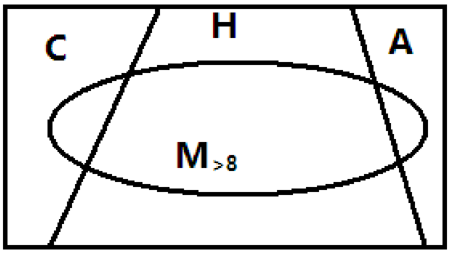
$$64a - 192a = \frac{16}{3} \Rightarrow -128a = \frac{16}{3} \Rightarrow a = \frac{-16}{384} = \frac{-1}{24}$$

$$b = -48\frac{-1}{24} = 2$$

$$H(x) = \frac{-1}{24}x^3 + 2x + \frac{2}{3}$$



A5.- Solución:



C=Elegido un estudiante al azar que sea de ciencias, H=....de Humanidades, A=....de Arte.

$M_{>8}$ =Elegido un estudiante al azar resulta que su nota media es superior a 8

$$M_{>8} = (C \cap M_{>8}) \cup (H \cap M_{>8}) \cup (A \cap M_{>8}) \Rightarrow$$
$$P(M_{>8}) = P[(C \cap M_{>8}) \cup (H \cap M_{>8}) \cup (A \cap M_{>8})] \Rightarrow$$
$$P(M_{>8}) = P(C) \cdot P\left({M_{>8}}/{C} \right) + P(H) \cdot P\left({M_{>8}}/{H} \right) + P(A) \cdot P\left({M_{>8}}/{A} \right) =$$
$$= 45\% \cdot 10\% + 35\% \cdot 20\% + 20\% \cdot 25\% = 16{,}5\%$$
$$P(M_{\leq 8}) = 1 - P(M_{>8}) = 83{,}5\%$$
$$P\left({C}/{M_{\leq 8}} \right) = \frac{P(C \cap M_{\leq 8})}{P(M_{\leq 8})} = \frac{P(C) \cdot P\left({M_{\leq 8}}/{C} \right)}{P(M_{\leq 8})} = \frac{45\% \cdot 90\%}{83{,}5\%} = \frac{39{,}5}{83{,}5} = 0{,}47$$

A6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha$, donde 1-α es el nivel de confianza (0,95 en nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, en nuestro caso 24,2 (sumamos los 10 valores y dividimos por 10); σ la desviación típica, ahora 10; n el tamaño de la muestra, 10.

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$ ya que $(1 - 0{,}025 = 0{,}975)$ Ver tabla

a) Luego el intervalo pedido es:

$$a) \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(24'2 - 1'96 \frac{10}{\sqrt{10}} \, , \, 24'2 + 1'96 \frac{10}{\sqrt{10}} \right) = (18'00, \, 30'40)$$

b)

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ luego } E < 1 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow 1'96 \frac{10}{\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow 19'6 < \sqrt{n} \Rightarrow n > 19'6^2 \Rightarrow n = 385$$

Opción B

1. *Considera el siguiente problema de programación lineal:*

Minimizar la función $F = 5\,x + 3\,y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$x + 2\,y \;\leq\; 16 \qquad ; \qquad 5\,x \;+\; 4y \geq 38 \qquad ; \qquad 4\,y \;-\; x \;\geq\; 2$

a) Dibuja la región factible (1 pto).

b) Determina los vértices de la región factible (0.25 ptos).

c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor (0.25 ptos).

2. *Un coleccionista de objetos antiguos tiene 40 pesas; algunas son de 200 g, otras son de 100 g y también tiene algunas pesas de 50 g. El número de pesas de 50 g supera en ocho a la suma de las pesas de 200 g y las de 100 g. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3400 g.*

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas pesas de cada valor posee el coleccionista. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x \leq 1 \\ (x-2)^2 + t & si\ x > 1 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = 1. (0.5 ptos)

b) Para t = 0, representa gráficamente la función f. (1 pto)

4. *En cierta sala de cine, una película permanece en cartel 16 semanas. La recaudación en taquilla de esta película a lo largo de cada una de esas 16 semanas se ajusta a la función:*

$F(x) \;=\; \frac{1}{3}\,x^3 \;-\; \frac{15}{2}\,x^2 \;+\; 36\;x \;+\; 150$ *donde* $0 \;\leq\; x \;\leq\; 16$ *está en semanas y F(x) es la recaudación en cientos de euros. Se pide:*

a) Cuál es la recaudación en el momento del estreno (x=0) y cuál es la recaudación al final (x=16). (0.5 ptos)

b) En qué intervalo o intervalos crece esta función y en cuál o cuáles decrece. (0.5 ptos)

c) En qué momentos se alcanzan las recaudaciones máxima y mínima respectivamente, y a cuánto ascienden estas recaudaciones. (0.5 ptos)

5. *En una empresa hay dos categorías para los empleados, en la categoría A se encuentra el 80 % de los empleados y el resto en la B. El 10 % de los empleados de la categoría A tiene contrato temporal mientras que en la categoría B este porcentaje es del 30 %.*

a) Elegido un empleado al azar de esa empresa, ¿cuál es la probabilidad de que tenga contrato temporal? (0.75 ptos)

b) Se escoge un empleado al azar y tiene contrato temporal, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la categoría B? (0.75 ptos)

6. *El gasto por hogar en teléfonos móviles e internet sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica* $\sigma = 30$ *euros. Tomando una muestra aleatoria de 9 hogares, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (128.3, 171.7).*

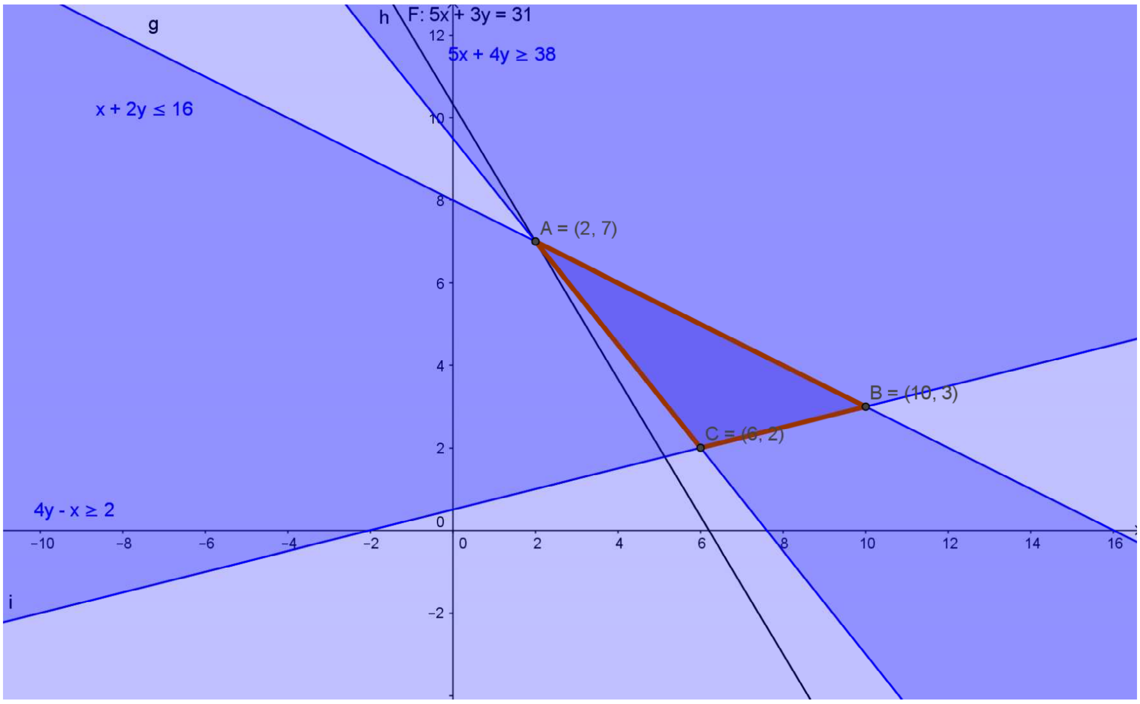
a) Calcula el nivel de confianza del intervalo y calcula el valor que se obtuvo para la media muestral. (1.25 ptos)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 96.6 %? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

B1.- Solución:

$$\begin{cases} \begin{matrix} x+2y \le 16 \\ 5x+4y \ge 38 \\ 4y-x \ge 2 \\ F = 5x+3y \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+2y=16 \\ 5x+4y=38 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2y=16 \\ 4y-x=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x+4y=38 \\ 4y-x=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \end{cases} \\ FMínimo = F(2{,}7) = 5*2+3*7 = 31 \end{cases}$$



B2.- Solución:

Llamaremos “x” al nº de pesas de 200g,”y“al nº de pesas de 100g y “z” al nº de pesas de 50g

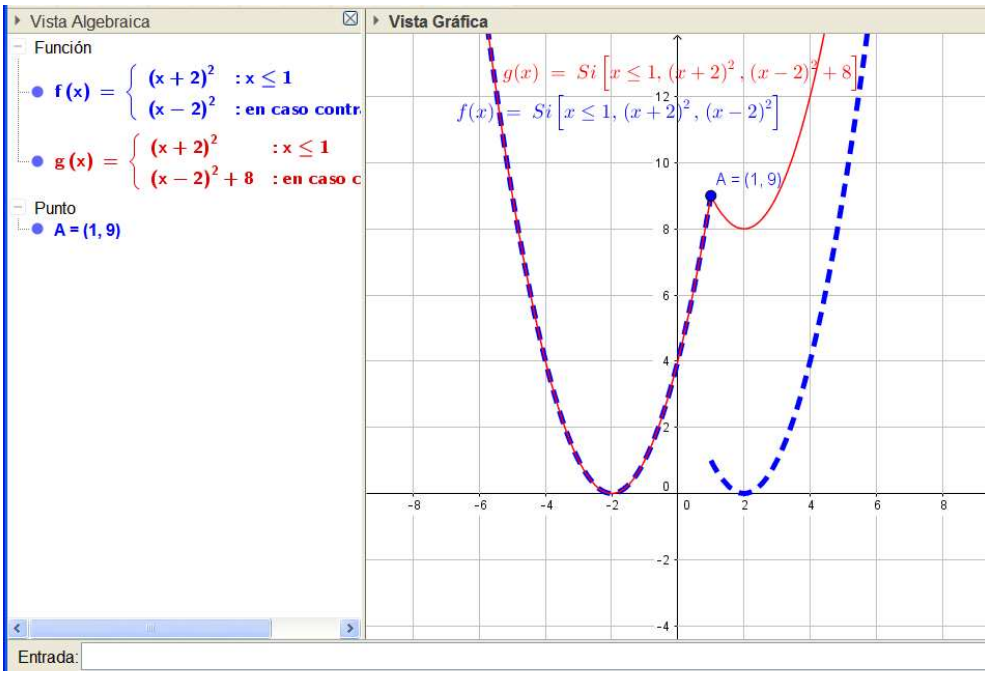
$$\begin{cases} \begin{matrix} x+y+z=40 \\ z=x+y-8 \\ 200x+100y+50z=3400 \end{matrix} \Longrightarrow \\ \begin{cases} x+y+z=40 \\ -x-y+z=-8 \\ Sumando \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2z=32 \Longrightarrow z=16 \\ Sustituyendo\ en\ 1ª y 3ª \\ x+y=24 \\ 200x+100y=3400-800 \end{cases} \Longrightarrow \\ \begin{cases} x+y=24 \\ 2x+y=26 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Restando\ x=2 \\ Sustituyendo \\ y=22 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=22 \\ z=16 \end{cases} \end{cases}$$

B3.- Solución:

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 \ si \ x\le 1\\(x-2)^2+t \ si \ x>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(1)=(1+2)^2=9\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+2)^2=9\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)^2+t=1+t\end{cases}\Rightarrow t=8 \text{ para continua en x } =1$$

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 \ si \ x\le 1\\(x-2)^2 \ si \ x>1\end{cases}\Rightarrow \text{se trata de dos trozos de parábolas sencillas, una con vértice en (-2,0)}$$

y la otra en (2,0) Ver gráfica en azul



B4.- Solución:

$$a)\ F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{15}{2}x^2+36x+150,\ 0\le x\le 16$$

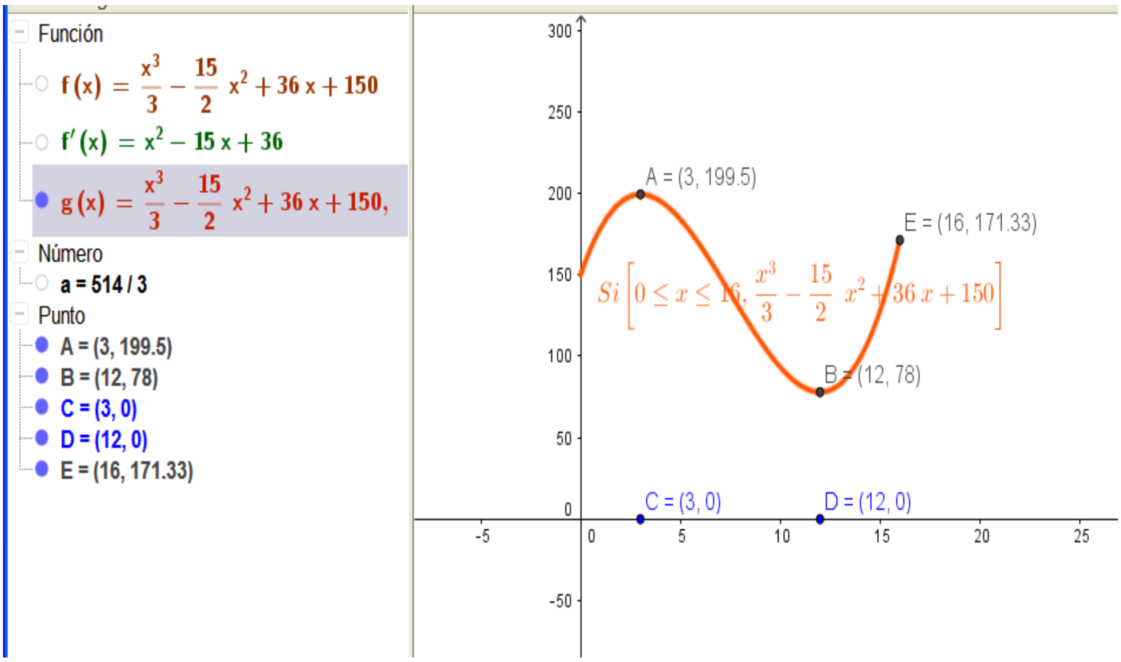
$F(0)=150, \Rightarrow 15.000$ euros en el momento del estreno

$F(16)=\frac{1}{3}16^3-\frac{15}{2}16^2+36\cdot 16+150=171'33 \Rightarrow 17.133$ euros recaudación al final

$$b)\begin{cases} F'(x)=x^2-15x+36 \\ F''(x)=2x-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F'(x)=0 \Rightarrow x^2-15x+36=0 \Rightarrow \begin{cases} x=12 \\ x=3 \end{cases} \\ F''(12)=24-15>0 \Rightarrow Mínimo(12, F(12)=(12{,}7.800€) \\ F''(3=6-15<0 \Rightarrow Máximo(3, F(3))=(3{,}19.950€) \end{cases}$$

$\Rightarrow F(x)$ creciente en $[0,3)$, decreciente en $(3,12)$ y creciente en$(12,16]$

Podemos corroborarlo viendo que la derivada F' (x) es positiva en $[0,3)$ y $(12,16]$ y neg en$(3,12)$



B5.- Solución:

A=Elegido un empleado al azar sea de la categoría A

B= Elegido un empleado al azar sea de la categoría B

Ct=Elegido un empleado al azar resulte que tiene contrato temporal.

$$a)P(Ct) = P\big((A \cap Ct) \cup (B \cap Ct)\big) = P(A) \cdot P\left({}^{Ct}/_{A}\right) + P(B) \cdot P\left({}^{Ct}/_{B}\right)$$
$$= 80\% \cdot 10\% + 20\% \cdot 30\% = 800\%\% + 60\%\% = 14\%$$

b) $P\left({}^{B}/_{Ct}\right) = \frac{P(B \cap Ct)}{P(Ct)} = \frac{20\% \cdot 30\%}{14\%} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} = 0{,}42$

B6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$, donde 1-α es el nivel de confianza . $\bar{x}$ la media de la muestra; σ la desviación típica, ahora 30; n el tamaño de la muestra, 9.

a) Nos dicen que $(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{30}{\sqrt{9}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{30}{\sqrt{9}}) = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot 10 < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot 10) = (128'3, 171'7)$

$\Rightarrow \bar{x} = \frac{128'3 + 171{,}7}{2} = 150 \text{ euros}$

$b)\ z_{\alpha/2} \cdot \frac{30}{\sqrt{9}} = z_{\alpha/2} \cdot 10 = \frac{171'7 - 128'2}{2} = 21'7 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'17 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}9850 = 1 - \alpha = 0{,}97 = 97\%$

Ver tabla

$c)\ E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} = z_{\alpha/2} \cdot 3$

$1 - \alpha = 96'6\% \Rightarrow \alpha = 0'034 \Rightarrow {}^{\alpha}/_{2} = 0'017 \Rightarrow 1 - 0'017 = 0'9830 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'12$ Ver tabla

$E = z_{\alpha/2} \cdot 3 = 2'12 \cdot 3 = 6'36 \text{ euros}$