



Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2017

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.

Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Opción A

1. a) Despeja X en la siguiente expresión matricial: $M \cdot X \cdot N = P$. (0.5 pts)

b) Despeja y calcula X en la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = I, \text{ donde } I \text{ es la matriz identidad de orden 2. (1 pto).}$$

2. Un coleccionista tiene pesas antiguas de tres pesos distintos. Tiene 8 del mayor peso; 12 de un peso intermedio y 20 del menor peso. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3800 g. Una pesa intermedia pesa la mitad que una de las mayores. Cuatro pesas de las menores equivalen a una mayor.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor en gramos de cada uno de los tres tipos de pesas. (1.5 pts)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x + 2t & \text{si } x \leq 0 \\ (x + t)^3 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x=0$? (0.5 pts)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.5 pts)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 pts)

4. De la función $J(x) = ax^4 + bx^3 + cx$ sabemos que en el origen de coordenadas, su derivada toma el valor -2 . Además sabemos que tiene un punto de inflexión en $(2, 0)$. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a , b y c . (1.5 pts)

5. De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: el 29 % de los conductores superaron los límites de alcohol en sangre, el 14 % de los conductores tenía presencia de drogas en sangre y el 37 % superaba los límites de alcohol o tenía presencia de drogas en sangre o ambas.

a) Calcula la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, el conductor supere los límites de alcohol y tenga presencia de drogas en sangre. (0.75 pts)

b) Razona si son independientes los sucesos superar los límites de alcohol y presencia de drogas en sangre. (0.75 pts)

6. El rendimiento por árbol de una especie de pistacho sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 1.2$ kilos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 40 y se calcula la media muestral, siendo esta igual a 6.7 kilos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del rendimiento con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 pts)

c) ¿Es razonable que la media de rendimiento de esta especie sea $\mu = 5$ kilos, con un nivel de confianza del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 pts)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

A1.- Solución:

$$a) M \cdot X \cdot N = P \Rightarrow M^{-1} M \cdot X \cdot N \cdot N^{-1} = M^{-1} \cdot P \cdot N^{-1} \Rightarrow$$

$$I \cdot X \cdot I = M^{-1} \cdot P \cdot N^{-1} \Rightarrow X = M^{-1} \cdot P \cdot N^{-1}$$

$$b) \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ He empleado la fórmula } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ cuando } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \text{ con la misma fórmula}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 4 \end{pmatrix}$$

A2.- Solución:

Llamaremos x al nº de pesas de mayor peso que tiene el coleccionista, y al nº de piezas de peso intermedio y z al nº de piezas de menor peso.

$$\begin{cases} 8x + 12y + 20z = 3800 \\ y = x/2 \\ 4z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Sust. 1ª y 2ª en 3ª} \\ 8x + 6x + 5x = 3800 \\ 19x = 3800 \\ x = 200 \\ y = 100 \\ z = 50 \end{cases}$$

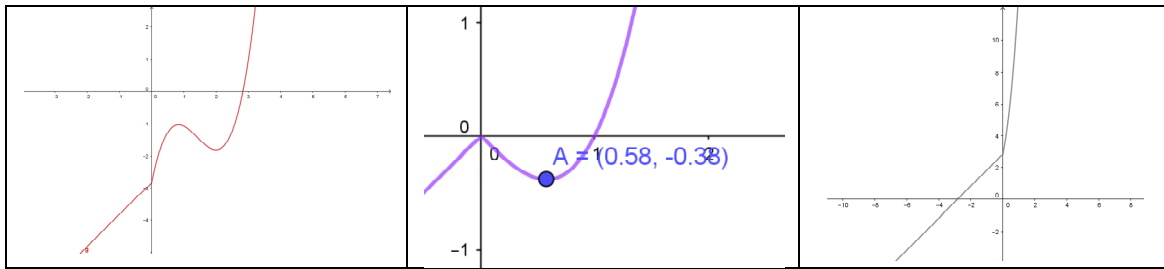
A3.- Solución:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2t & \text{si } x \leq 0 \\ (x+t)^3 - x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 + 2t \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + 2t = 2t \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+t)^3 - x = t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \sqrt{2} \\ t = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{para continua en } x = 0 \end{cases}$$

$$b) \text{ Para } t = 0 \text{ extremos en } (0, +\infty), \begin{cases} f(x) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 \\ f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ f''(x) = 6x \Rightarrow f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Mínimo en } (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-2}{3\sqrt{3}})$$

$$c) \text{ Creciente cuando } f'(x) > 0 \Rightarrow 3(x - \frac{1}{\sqrt{3}})(x + \frac{1}{\sqrt{3}}) > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ decreciente cuando } 0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Ver gráfica



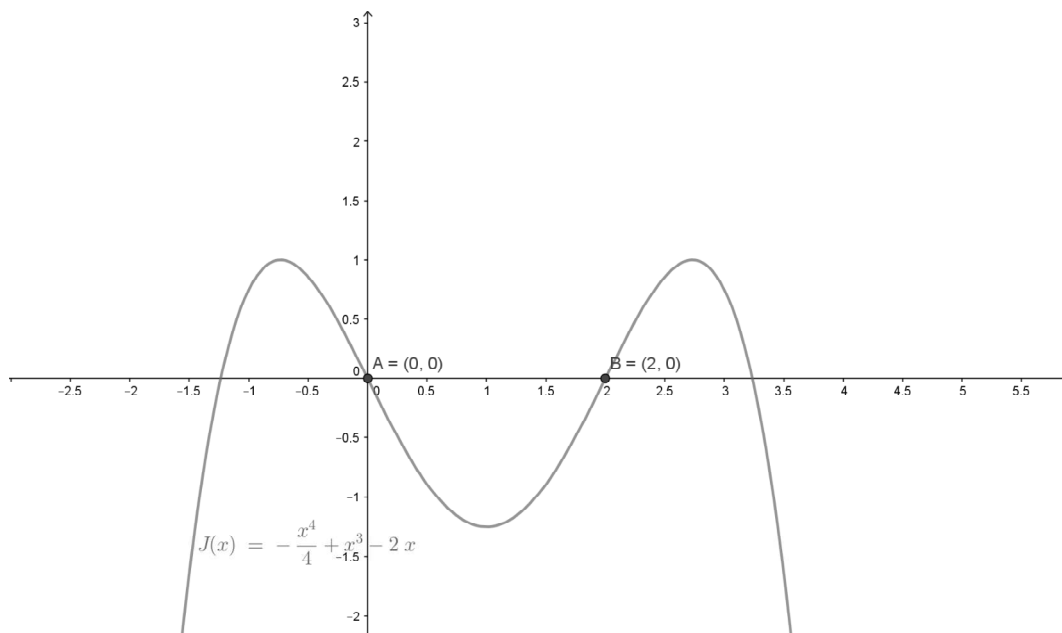
A4.- Solución:

$$J(x) = ax^4 + bx^3 + cx$$

$$\begin{cases} J'(0) = -2 \\ J'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + c \end{cases} \Rightarrow c = -2$$

$$\begin{cases} PI(2,0) \Rightarrow J''(2) = 0 \\ J''(x) = 12ax^2 + 6bx \end{cases} \Rightarrow 48a + 12b = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ b = 1 \\ a = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J(2) = 0 \\ J(x) = ax^4 + bx^3 + cx \end{cases} \Rightarrow a2^4 + b2^3 - 2 \cdot 2 = 0$$



A5.- Solución:

Sl=Elegido un conductor al azar supera los límites de alcohol en sangre, D= Elegido un conductor al azar da positivo en drogas

a) Sabemos que $P(Sl \cap D) = P(Sl) + P(D) - P(Sl \cup D) = 29\% + 14\% - 37\% = 6\%$

b) Nos preguntamos ¿ $P\left(\frac{Sl}{D}\right) = P(Sl)$?

$$P\left(\frac{Sl}{D}\right) = \frac{P(Sl \cap D)}{P(D)} = \frac{6\%}{14\%} = 43\% \neq 29\% = P(Sl) \Rightarrow \text{No son independientes}$$

A6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza (0,95 en}$$

nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, en nuestro caso 6,7 kg; σ la desviación típica, ahora 1,2; n el tamaño de la muestra, 40.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0,025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96 \text{ ya que } (1 - 0,025 = 0,975) \text{ Ver tabla}$$

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(6'7 - 1'96 \frac{1'2}{\sqrt{40}}, 6'7 + 1'96 \frac{1'2}{\sqrt{40}}\right) = (6'33, 7'07)$$

b) Si el nivel de confianza disminuye, por ejemplo 90, entonces el intervalo disminuye porque

$$1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow \alpha = 0,10 \Rightarrow \alpha / 2 = 0,05 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,645 \text{ ya que } (1 - 0,05 = 0,950)$$

Si aumentase el nivel de confianza aumentaría el intervalo porque

$z_{\alpha/2}$ aumentaría.

c) No es razonable porque si 5 no pertenece al intervalo hallado en el apartado a), menos pertenecerá si reducimos el intervalo, como he explicado en el apartado b).

Opción B

1. Un transportista debe llevar en su camión sacos de cemento y sacos de yeso con las siguientes condiciones: El número de sacos de cemento estará entre 25 y 100 y el número de sacos de yeso estará entre 30 y 90.

El transportista sabe que un saco de cemento pesa 30 kg y un saco de yeso pesa 20 kg, y se propone cumplir las condiciones llevando en su camión el menor peso posible.

- Expresa la función objetivo. (0.25 pts)
- Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.75 pts)
- Halla el número de sacos de cada clase que debe llevar para que el peso transportado sea mínimo. (0.5 pts)

2. A través de una página de internet se han vendido hoy entradas para tres eventos distintos: 120 entradas para un estreno de cine, 50 entradas para una función teatral y 150 entradas para un concierto de música. El valor total de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que el precio de dos entradas de teatro equivale al de cinco entradas de cine. El precio de dos entradas para el concierto musical equivale al de tres entradas de teatro.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto vale cada una de las entradas para cada evento. (1.5 pts)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 pts)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (tx-6)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 1$. (0.5 pts)

b) Para $t = 2$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

4. Un ciclista da una vuelta completa a un circuito de modo que su velocidad a lo largo de este recorrido se ajusta a la función: $V(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{2}x^3$ donde $V(x)$ está en Km/h y x en minutos, siendo $x \geq 0$ y $V(x) \geq 0$. Se pide:

a) Teniendo en cuenta que el ciclista se detiene cuando completa una vuelta al circuito, calcula cuánto tiempo tarda en completarlo (0.5 pts).

b) Determina en qué intervalo su velocidad es creciente y en qué intervalo es decreciente (0.5 pts).

c) Determina en qué instante alcanza la velocidad máxima y cuál es esa velocidad (0.5 pts).

5. Una persona que fuma habitualmente tiene una probabilidad 0.1 de padecer cáncer de pulmón en el transcurso de su vida. Suponiendo que el hecho de que una persona padezca cáncer de pulmón es independiente de que otra lo padezca.

a) Si dos personas fuman habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que las dos padezcan cáncer de pulmón? (0.25 pts)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que padezcan cáncer de pulmón al menos una de cuatro personas que fuman habitualmente? (0.5 pts)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que padezca cáncer de pulmón exactamente una persona de dos que fuman habitualmente? (0.75 pts)

6. El gasto mensual en electricidad (sin incluir los impuestos) sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 7$ euros. Se eligen al azar 10 hogares y se pide el gasto mensual, siendo estos: 25, 29, 30, 32, 24, 28, 31, 32, 33 y 32 euros respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del gasto por hogar, con un nivel de confianza del 97 % (1.25 pts)

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros? (0.75 pts)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

B1.- Solución:

$c = n^{\circ}$ de sacos de cemento, $y = n^{\circ}$ de sacos de yeso

a) Función objetivo $P(c, y) = 30c + 20y$ queremos minimizarla

b) restricciones $\begin{cases} 25 < c < 100 \\ 30 < y < 90 \end{cases}$

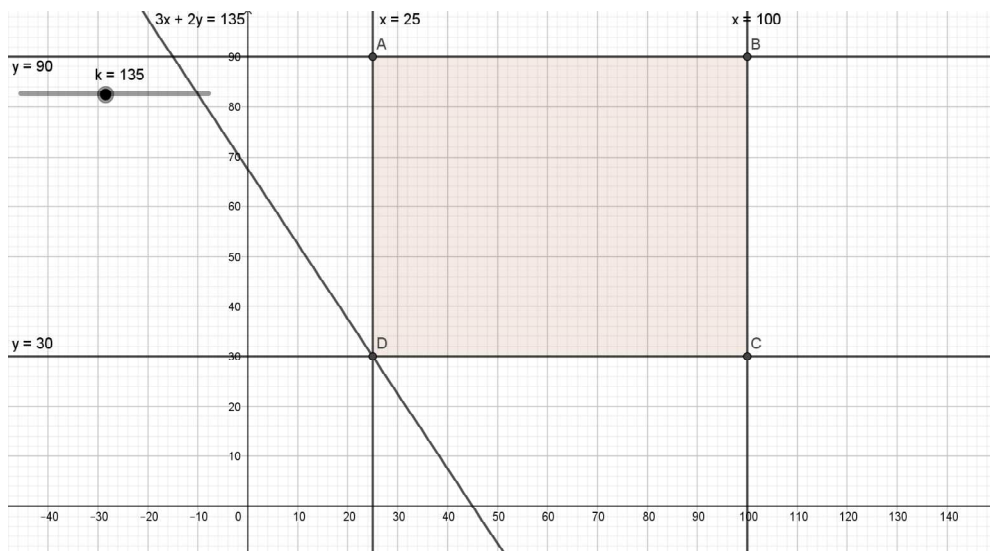
$$30c + 20y = 0 \Leftrightarrow 3c + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \text{pasa por } (0,0) \\ c = 2 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow \text{pasa por } (2,-3) \end{cases}$$

Buscamos una recta paralela a la anterior y que pase por la región factible

haciendo mínima la función objetivo. En la gráfica vemos que es $30c + 20y = 13500$

c) Luego el número de sacos de cemento es 25 y el n° de sacos de yeso es 30

$$P(25,30) = 30 * 25 + 10 * 30 = 13500 \text{ kg}$$

**B2.- Solución:**

Llamaremos c al n° de entradas vendidas para cine, t al n° de entradas vendidas para teatro, y m al n° de entradas vendidas para concierto de música.

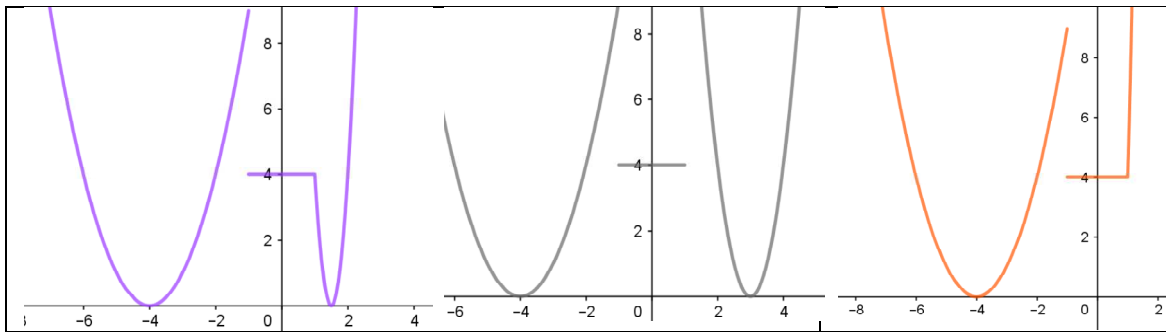
$$\begin{cases} 120c + 50t + 150m = 6460 \\ 2t = 5c \\ 2m = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{2t}{5} \\ m = \frac{3t}{2} \\ 12 * \frac{2t}{5} + 5t + 15 * \frac{3t}{2} = 646 \\ 48t + 50t + 225t = 6460 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 323t = 6460 \\ t = 20 \\ c = 8 \\ m = 30 \end{cases}$$

B3.- Solución:

$$f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ (tx-6)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (tx-6)^2 = (t-6)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{para continua en } x = 1 \Rightarrow 4 = (t-6)^2 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 12t + 36 = 4 \\ t = 4 \\ t = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Hay dos valores} \\ \text{para los que es continua} \\ 4 \text{ y } 8 \end{cases}$$

b) Para $t = 2$, $\begin{cases} (x+4)^2 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 4(x-3)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Se trata de dos ramas de parábola} \\ \text{y un tramo constante. Ver gráfica central} \end{cases}$



B4.- Solución:

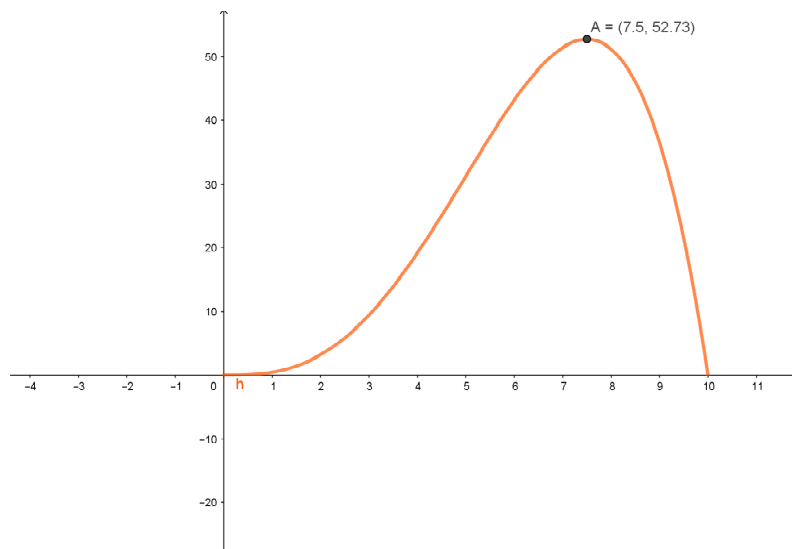
$$V(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{2}x^3 \text{ si } 0 \leq x \leq 10$$

$$a) V(x) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{20}x + \frac{1}{2}\right)x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1/2}{1/20} = 10 \text{ minutos} \end{cases}$$

$$b) V'(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow V'(x) > 0 \Rightarrow x^2\left(-\frac{1}{5}x + \frac{3}{2}\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x \in (0, \frac{15}{2}) \text{ creciente} \\ x \in (\frac{15}{2}, 10), V'(x) < 0 \text{ decreciente} \end{cases}$$

$$c) V'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$V''(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 3x \Rightarrow V''\left(\frac{15}{2}\right) < 0 \Rightarrow \text{Máximo } \left(\frac{15}{2}, V\left(\frac{15}{2}\right)\right) = \text{a los } 7'5 \text{ minutos } 52'73 \text{ Km/h}$$



B5.- Solución:

C=Elegido un fumador al azar que padezca cáncer de pulmón

$$a) P(C) = 0'1 \Rightarrow P(C_1 \cap C_2) = 0'1 * 0,1 = 0'01$$

$$b) P(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4) = 1 - P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4) = 1 - 0'1^4 = 0'9999$$

$$c) P[(C_1 \cap C_2') \cup (C_1' \cap C_2)] = 2P(C)(1 - P(C)) = 2 * 0'1 * 0'9 = 0'18$$

También se puede resolver considerando que se trata de una Binomial (2,0'1)

$$c) \binom{2}{1} 0'1^1 0,9^1 = 0'18 \text{ y también los otros apartados}$$

B6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza (0,97 en}$$

nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, en nuestro caso 29,6 (sumamos los 10 valores y dividimos por 10); σ la desviación típica, ahora 7; n el tamaño de la muestra, 10.

$$1 - \alpha = 0,97 \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \alpha / 2 = 0,015 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2'17 \text{ ya que } (1 - 0,015 = 0,985) \text{ Ver tabla}$$

a) Luego el intervalo pedido es:

$$a) \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(29'6 - 2'17 \frac{7}{\sqrt{10}}, 29'6 + 2'17 \frac{7}{\sqrt{10}} \right) = (24'80, 34'40)$$

$$b) \text{ Sabemos que } E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\text{luego } E < 2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow 2'17 \frac{7}{\sqrt{n}} < 2 \Rightarrow 2'17 \frac{7}{2} < \sqrt{n} \Rightarrow n > (2'17 \frac{7}{2})^2 \Rightarrow n = 90$$