Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (2015)
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. *a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial:* $X \cdot A + 3X = B$*, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden. (0.75 ptos)*

b) Dada la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$*, despeja y calcula la matriz X. (0.75 ptos)*

2. *En un obrador de mazapán de Toledo se venden, en cajas de medio kilo, delicias de mazapán a 15 euros, pastas de piñón a 20 euros y pastas de almendras a 10 euros. En un día que se vendieron 75 cajas de dichos dulces, se recaudaron en total 1075 euros. Sabiendo que el número de cajas vendidas de delicias de mazapán fue la semisuma de las cajas de pastas de piñón y pastas de almendras:*

a) Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones que permite obtener el número de cajas vendidas de cada clase de dulce. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+t)^2 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x = 0 \\ (x-t)^2 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ *es continua en x = 0? (0.5 ptos)*

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ *en el intervalo* $(-\infty, 0)$ *con* $t = 4$*. (0.5 ptos)*

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ *en* $(-\infty, 0)$ *con* $t = 4$*. (0.5 ptos)*

4. *Dada la función polinómica* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$*, calcula los valores de los parámetros a, b y c, sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la curva en x=0 es -24, que dicha función tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa x=2 y un punto de inflexión en x=-1. (1.5 ptos)*

5. *Una caja contiene ocho tornillos, de los que dos son defectuosos.*

a) Si extraemos dos tornillos sin reemplazamiento, y el primero ha resultado ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo también lo sea? (0.75 ptos)

b) Si vamos extrayendo tornillos sin reemplazamiento, uno tras otro, hasta localizar los dos defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de necesitar exactamente tres extracciones para localizarlos? (0.75 ptos)

6. *El contenido de nicotina en los cigarros de una marca determinada, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica* $\sigma = 2\,mg$*. Se toma una muestra aleatoria de 150 cigarros y se observa que la media del contenido en nicotina de la muestra es 9 mg.*

a) Calcula con un nivel de confianza del 95 % el intervalo de confianza para la media poblacional del contenido de nicotina de los cigarros de esa marca. (1 pto)

b) El fabricante afirma que el contenido en nicotina de estos cigarros es de sólo 8.4 mg. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 95 %? ¿y con un nivel de significación igual a 0.2? Razona tus respuestas. (1 pto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

A1.- Solución:

$a)\ X\cdot A+3X=B\Rightarrow X(3+A)=B\Rightarrow X=B(3+A)^{-1}$

$$b)\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 10 & 6\end{pmatrix}$$

$$\text{Fórmula}:\begin{pmatrix}\text{a} & \text{b}\\ \text{c} & \text{d}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

A2.- Solución:

Llamaremos M al número de cajas de delicias de mazapán, P al número de cajas de pastas de piñón y A al número de cajas de pastas de almendra:

$$\begin{cases}M=\dfrac{P+A}{2}\\ M+P+A=75\\ 15M+20P+10A=1075\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{cases}2M-P-A=0\\ M+P+A=75\end{cases}\Rightarrow\{3M=75\Rightarrow M=25\\ \begin{cases}P+A=75-M\\ 20P+10A=1075-15*25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P+A=50\\ 2P+A=70\end{cases}\Rightarrow P=20\\ A=50-P\Rightarrow A=30\end{cases}$$

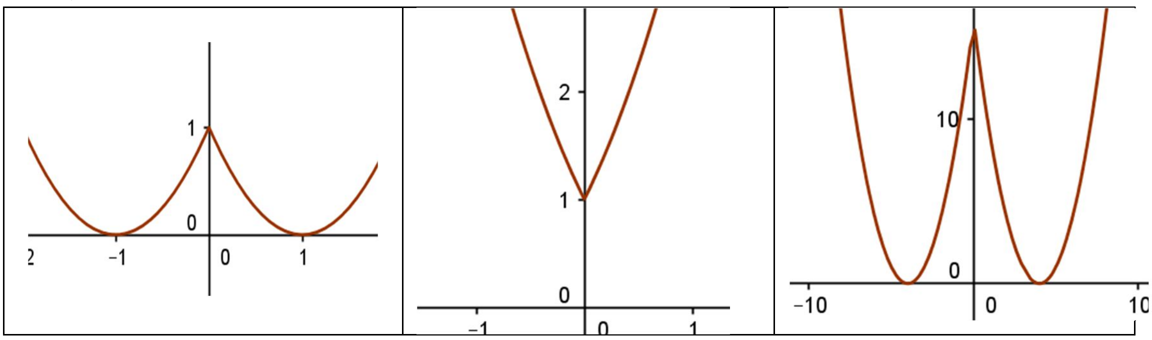
A3.- Solución:

$a)$ Para continua en x = 0 $f(0)=1=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$

$$\begin{cases}f(0)=1\\ \lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+t)^2=t^2\Rightarrow\{t^2=1\Rightarrow t=\pm1\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x-t)^2=t^2\end{cases}$$

$b)\ f(x)=(x+4)^2\Rightarrow f'(x)=2(x+4)\Rightarrow\begin{cases}f''(x)=2>0\\ f'(x)=0\ si\ x=-4\end{cases}\Rightarrow$ Mínimo en (-4,0)

c) $\begin{cases}f'(x)=2(x+4)\Rightarrow f'(x)<0\ \forall x<-4\Rightarrow f \text{ es decreciente en } (-\infty,-4)\\ f'(x)=2(x+4)\Rightarrow f'(x)>0\ \forall x>-4\Rightarrow f \text{ es creciente en } (-4,0)\end{cases}$

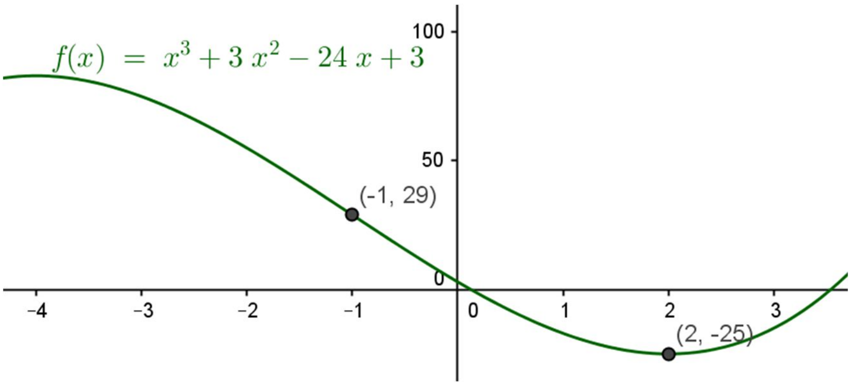


A4.- Solución:

Del enunciado obtenemos que

$$\begin{cases} f(x)=ax^3+bx^2+cx+3 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b \\ f'(0)=-24 \Rightarrow c=-24 \\ f'(2)=0 \Rightarrow 12a+4b=24 \Rightarrow 6a+2b=12 \Rightarrow \begin{cases} \text{Sumando esta y la última} \\ 4b=12 \Rightarrow b=3 \\ \text{Y substituyendo en la última} \\ \text{a} = 1 \end{cases} \\ f''(-1)=0 \Rightarrow -6a+2b=0 \end{cases}$$

Luego $f(x)=x^3+3x^2-24x+3$



A5.- Solución:

a) Nos piden $P(2^o D / 1^o D) = \dfrac{P(1^o D \cap 2^o D)}{P(1^o D)} = \dfrac{\frac{2}{8} * \frac{1}{7}}{\frac{2}{8}} = \dfrac{1}{7}$

$b)$ Para necesitar exactamente 3 extracciones tiene que ocurrir $(1^o B, 2^o D, 3^o D)$ o $(1^o D, 2^o B, 3^o D)$

Es decir : primero bueno, segundo defectuoso y tercero defectuoso

o primero defectuoso, segundo bueno y tercero defectuoso

Luego la prob. pedida es :

$$P(1^o B, 2^o D, 3^o D) + P(1^o D, 2^o B, 3^o D) = \frac{6}{8} * \frac{2}{7} * \frac{1}{6} + \frac{2}{8} * \frac{6}{7} * \frac{1}{6} = \frac{1}{28} + \frac{1}{28} = \frac{1}{14}$$

A6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que: $P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$, donde 1-α es el nivel de confianza (0,95 en nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra 9; σ la desviación típica, ahora 2; n el tamaño de la muestra, 150.

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0{,}025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$ ya que $(1 - 0{,}025 = 0{,}975)$ .Ver tabla

a)Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;,\; \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(9 - 1{,}96 \frac{2}{\sqrt{150}} \;,\; 9 + 1{,}96 \frac{2}{\sqrt{150}}\right) = (8'6799 \;,\; 9'3200)$$

b) Si el fabricante afirma que el contenido en nicotina es 8’4 mg NO se puede aceptar con un nivel de confianza de 95%

Sin embargo si el nivel de significación fuese el 2%, el nivel de confianza sería el 98% y tendríamos que

$1 - \alpha = 0{,}98 \Rightarrow \alpha = 0{,}02 \Rightarrow \alpha / 2 = 0{,}01 \Rightarrow z_{\alpha/2} > 1{,}99$ ya que $(1 - 0{,}01 = 0{,}99)$

La tabla que nos dan no alcanza mas que hasta 0,9767. Y para este valor el intervalo es

$\left(9 - 1{,}99 \frac{2}{\sqrt{150}} , 9 + 1{,}99 \frac{2}{\sqrt{150}}\right) = (8'0251 , 9'9749)$. En este caso SI aceptaríamos 8,4 mg

Conviene aclarar que lo que nos interesa es obtener intervalos de confianza estrechos, queremos determinar la media de la población, y si el intervalo es muy grande, aunque haya mucha confianza sabremos poco sobre el verdadero valor de la media. De otra forma, el comerciante nos puede decir un valor pequeño con mucha confianza, pero nosotros podemos decirle un valor grande con la misma confianza.

Propuesta B

1. *Considera el siguiente problema de programación lineal:*

Minimizar la función $z = -x - 10y$*, sujeta a las siguientes restricciones:*

$$\begin{array}{ll} x & \leq 4 \\ x + 3y & \leq 6 \\ x \geq 0, & y \geq 0 \end{array}$$

a) Dibuja la región factible. (1 pto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)

c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor. (0.25 ptos)

2. *Una fábrica de dulces elabora cajas de tres tipos de bombones: bombón crocante, bombón mazapán y bombón gianduja; para su elaboración se utiliza azúcar, almendra y chocolate. La siguiente tabla muestra la cantidad de estas materias primas que se utilizan para fabricar una caja de cada tipo de bombón.*

	Caja de bombón crocante	*Caja de bombón mazapán*	*Caja de bombón gianduja*
Azúcar	*200 gramos*	*100 gramos*	*200 gramos*
Almendra	*100 gramos*	*200 gramos*	*200 gramos*
Chocolate	*200 gramos*	*200 gramos*	*100 gramos*

Si se dispone de 12500 gramos de azúcar, 13000 gramos de almendras y 12000 gramos de chocolate.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el número de cajas de bombones de cada tipo que se pueden fabricar utilizando el total de la materia prima disponible. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} |x| - t & si\ x \leq 2 \\ x^2 - 8x + 13 & si\ x > 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t *para que* f *sea continua en* $x = 2$*. (0.5 ptos)*

b) Para $t = 1$*, representa gráficamente la función* f*. (1 pto)*

4. *La función que representa el costo por kilómetro, en miles de euros, de la construcción de una canalización de agua es* $C(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$*, con* $0 \leq x \leq 4.5$*.*

a) ¿Cuál fue el coste de la construcción del primer kilómetro (x=1)? (0.25 ptos)

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento del costo de la obra. (0.75 ptos)

c) ¿En qué kilómetro el coste de la construcción fue máximo y a cuánto ascendió? (0.5 ptos)

5. *El 60 % de las compras de un supermercado las realizan mujeres. El 20 % de las compras realizadas por estas supera los 30 euros, mientras que el 30 % de las realizadas por hombres supera esa cantidad.*

a) Elegido un ticket de compra al azar, ¿cuál es la probabilidad de que supere los 30 euros? (0.75 ptos)

b) Si se sabe que un ticket de compra no supera los 30 euros, ¿cuál es la probabilidad de que la compra la hiciera un hombre? (0.75 ptos)

6. *Un fabricante de ordenadores sabe que el tiempo de duración, en meses, de un componente del ordenador que fabrica sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 6 meses. Con una muestra de su producción, elegida al azar, y un nivel de confianza del 95 % se ha obtenido para la media poblacional el intervalo de confianza (23.0398, 24.9602).*

a) Calcula el valor que se obtuvo para la media de la muestra y el tamaño de la muestra utilizado. (1.25 ptos)

b) ¿Cuál hubiera sido el error máximo admisible de su estimación si hubiera tomado una muestra de tamaño 250? (0.75 ptos)

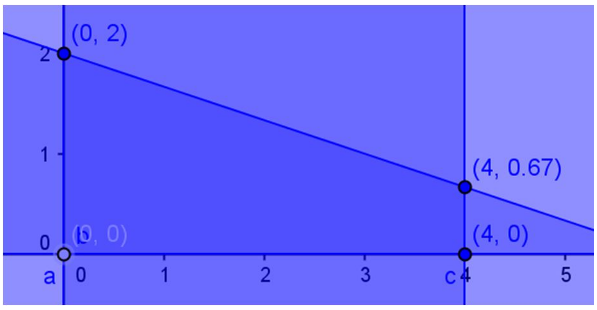
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

B1.- Solución:

$z=-x-10y$

$$\begin{cases} x\le 4 \\ x+3y\le 6 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=4 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases} & \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} & \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(4,{}^{2}\!/_{3})=-4-10*\frac{2}{3}=-\frac{32}{3}=10'66.. \\ z(0,2)=0-20=-20 \\ z(0,0)=0 \\ z(4,0)=-4 \end{cases}$$

Luego la solución óptima es z(0,2) = -20



B2.- Solución:

Llamaremos C,M,G al **número de cajas** pedidas de cada tipo de bombones

$$a)\begin{cases} 200C+100M+200G=12500 \\ 100C+200M+200G=13000 \\ 200C+200M+100G=12000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C+M+2G=125 \\ C+2M+2G=130 \\ 2C+2M+G=120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2C+M+2G=125 \\ -C-2M-2G=-130 \end{cases} \\ \begin{cases} 4C+4M+2G=240 \\ -C-2M-2G=-130 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

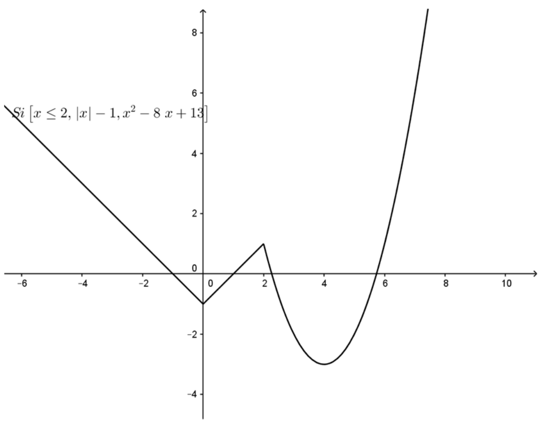
$$\Rightarrow \begin{cases} C-M=-5 \\ 3C+2M=110 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C-2M=-10 \\ 3C+2M=110 \end{cases} \Rightarrow 5C=100 \Rightarrow C=20$$

Y sustituyendo en las anteriores ecuaciones: $M=25, \quad G=30$

B3.- Solución:

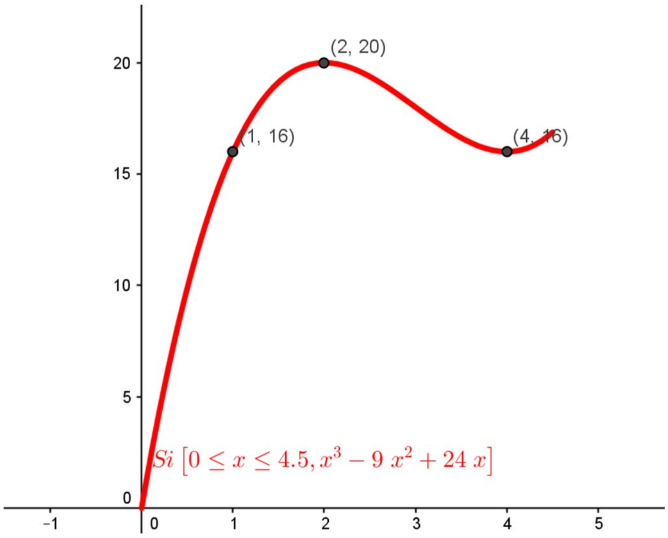
$a)$ Para continua en x = 2 $f(2)=|2|-t=2-t=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)$

$$\begin{cases} f(2)=2-t \\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} |x|-t=2-t \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^2-8x+13=4-16+13=1 \end{cases} \Rightarrow \{2-t=1 \Rightarrow t=1$$



B4.- Solución:

$$\begin{cases} C(x)=x^3-9x^2+24x \Rightarrow C'(x)=3x^2-18x+24 \Rightarrow C''(x)=6x-18 \\ C'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-18x+24=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow C'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4) \\ C(1)=1-9+24=16 \Rightarrow 16000\text{€ es el coste del primer km.} \\ C''(2)=12-18=-6<0 \Rightarrow \text{Coste máximo en el km 2,} \quad \text{C(2)} = 8 - 36 + 48 = 20 \text{ mil €} \\ C''(4)=24-18=6>0 \Rightarrow \text{Coste mínimo en el km 4,} \\ C'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4) \Rightarrow C'(x)>0 \text{ en (0,2)} \Rightarrow \text{C(x) Creciente en (0,2)} \\ C'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4) \Rightarrow C'(x)<0 \text{ en (2,4)} \Rightarrow \text{C(x) decreciente en (2,4)} \\ C'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-4) \Rightarrow C'(x)>0 \text{ en (4,4'5)} \Rightarrow \text{C(x) Creciente en (4,4'5)} \end{cases}$$



B5.- Solución:

Llamaremos Pt>30 al suceso elegido un ticket al azar el precio que figura es mayor de 30€. Nos piden P(Pt>30)

$$a)\ P(Pt>30)=P(Pt>30\cap M)+P(Pt>30\cap H)=P(M)P(Pt>30/M)+P(H)P(Pt>30/H)=$$

$$=60\%*20\%+40\%*30\%=12\%+12\%=24\%$$

$$b)\ P(Pt\le 30)=1-P(Pt>30)=1-24\%=76\%$$

$$P(H/Pt\le 30)=\frac{P(H\cap Pt\le 30)}{P(Pt\le 30)}=\frac{P(H)-P(H\cap Pt>30)}{P(Pt\le 30)}=\frac{40\%-40\%*24\%}{76\%}=\frac{30'4\%}{76\%}=40\%$$

B6.- Solución:

Como la fórmula que nos da el intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\Rightarrow \bar{x}=\frac{23'0398+24'9602}{2}=24\Rightarrow z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0'9602\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\ge z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{0'9602}\Rightarrow n\ge (z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{0'9602})^2=(1'96\frac{6}{0'9602})^2=13$$

$$b)\quad \varepsilon=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1'96\frac{6}{\sqrt{250}}=0'7438$$