

Universidad de Castilla la Mancha – PAEG – Junio 2014

Opción A

1.- Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Calcula la matriz $M = (2I + A)^2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.
 b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $XB = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

$$M = (2I+A)^2 \rightarrow 2I+A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 37 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot B = I \rightarrow X \cdot B \cdot B^{-1} = I \cdot B^{-1} \rightarrow X \cdot I = B^{-1} \rightarrow X = B^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow \neq 0 \rightarrow \exists B^{-1} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} (B^d)^t$$

$$B^d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (B^d)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2.- Una empresa de seguros tiene tres sucursales, una en Toledo, otra en Albacete y la tercera en Cuenca. En total entre las tres sucursales vendieron 45 pólizas de seguro del hogar en el último mes. El número de pólizas vendidas en la sucursal de Cuenca es la media aritmética de las vendidas en Toledo y Albacete. Y el número de pólizas vendidas en Toledo es el doble de la cantidad que resulta al restar las vendidas en Albacete menos las vendidas en Cuenca.

- a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el número de pólizas de seguro del hogar que se han vendido en cada sucursal.
 b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

– $x = n^{\circ}$ pólizas Toledo

– $y = n^{\circ}$ pólizas Albacete

– $z = n^{\circ}$ pólizas Cuenca

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ z = \frac{x+y}{2} \\ 2x = y - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 45 \\ -x - y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 0 & 3 & 45 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 0 & 3 & 45 \\ 0 & -3 & -1 & -90 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \\ z = 15 \end{cases}$$

Por tanto, han vendido 20 pólizas en Toledo, 10 en Albacete y 15 en Cuenca.

3.- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x-t| & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$?
 b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0; +\infty)$.
 c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0; +\infty)$.

Para que sea continua $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x-t| = -t \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x = 0 \\ f(0) = |x-t| = -t \end{cases} \rightarrow -t = 0 \rightarrow t = 0$$

En el intervalo $(0, +\infty)$, la función tiene la expresión $f(x) = x^2 + 2x$

- $f'(x) = 2x + 2$
- $f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$
- $f''(x) = 2 \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow \exists$ un mínimo relativo $\rightarrow f(-1) = -1$

Por tanto, existe un **mínimo relativo** en el punto **(-1, -1)**, pero que **no pertenece** al intervalo **(0, +∞)**. Es decir, en el intervalo estudiado no existen extremos relativos. Con lo que la función será, en ese intervalo, creciente,

decreciente o constante. Para averiguarlo, estudiamos el signo de $f'(x)$ en dicho intervalo: $f'(1) = 4 > 0$, la función es **creciente** en el intervalo $(0, +\infty)$.

4.- Calcula los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, pase por el pto $(0, 0)$, tenga un mínimo relativo en el pto de abscisa $x=1$ y el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $x=2$ sea igual a 24.

- Si pasa por el pto $(0,0) \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow \mathbf{c = 0}$
- Si tiene un mínimo relativo en el pto $x=1 \rightarrow f'(1) = 0$
 - $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$
 - $f'(1) = 0 \rightarrow \underline{4a + 2b = 0}$
- La pendiente de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en $x=2$ es: $f'(2)$
 - $f'(2) = 32a + 4b$
 - $m = 24 \rightarrow \underline{32a + 4b = 24}$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ 32a + 4b = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{a = 1} \\ \mathbf{b = -2} \end{cases}$$

Por tanto, la función pedida es: $\mathbf{f(x) = x^4 - 2x^2}$

5.- En una población, el 40% de los habitantes ven habitualmente la televisión, el 10% leen habitualmente y el 1% ven la televisión y leen habitualmente.

- a) Se elige un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea la televisión o lea habitualmente o ambas cosas?
 - b) Si elegimos un habitante al azar y ve la televisión habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que lea habitualmente?
- Suceso A = ver la televisión $\rightarrow P(A) = 0.4$
 - Suceso B = leer $\rightarrow P(B) = 0.1$
 - $P(A \cap B) = 0.01$

La probabilidad de que vea la televisión o lea o ambas cosas es: $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.1 - 0.01 \rightarrow \mathbf{P(A \cup B) = 0.49}$$

La probabilidad de que si ve la televisión, lea: $P(B/A)$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.01}{0.4} \rightarrow \mathbf{P(B/A) = 0.025}$$

6.- Una empresa produce dispositivos electrónicos con pantalla HD, la resolución de estas pantallas sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 20 píxeles. Se tomó una muestra aleatoria de 100 dispositivos electrónicos y mediante un estudio estadístico se obtuvo el intervalo de confianza $(1076.08, 1083.92)$ para la resolución media de las pantallas elegidas al azar.

- a) Calcula el valor de la resolución media de las pantallas de los 100 dispositivos electrónicos elegidos para la muestra.
- b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo.
- c) ¿Cómo podríamos aumentar o disminuir la amplitud del intervalo? Sin calcular el intervalo de confianza, ¿se podría admitir que la media poblacional sea 1076.08 píxeles con un nivel de confianza del 90%? Razona tus respuestas.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

$$IC = \bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = (1076.08, 1083.92) \rightarrow \begin{cases} \bar{x} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 1076.08 \\ \bar{x} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 1083.92 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{x} - 2 Z_{\alpha/2} = 1076.08 \\ \bar{x} + 2 Z_{\alpha/2} = 1083.92 \end{cases} \rightarrow \mathbf{\bar{x} = 1080 \text{ px}}$$

Para calcular el nivel de confianza $[(1-\alpha) \cdot 100]$, primero obtenemos el valor crítico $Z_{\alpha/2}$ del sistema anterior, de forma que: $Z_{\alpha/2} = 1.96$.

$$P(Z \leq Z_{\alpha/2}) \leq 1 - \alpha/2 \rightarrow P(Z \leq 1.96) \leq 1 - \alpha/2 \rightarrow \text{tabla} \rightarrow 0.975 \leq 1 - \alpha/2 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow \alpha = 0.05$$

$$(1 - \alpha) \cdot 100\% = (1 - 0.05) \cdot 100\% = 95\%$$

Si queremos aumentar o disminuir la amplitud del intervalo, podríamos variar el **tamaño de la muestra**, de manera que:

- Si aumentamos n , disminuye la amplitud del intervalo, al hacerlo el radio: $Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Si disminuimos n , aumenta la amplitud del intervalo, al hacerlo el radio.

Si el nivel de confianza fuese del 90%, la amplitud del intervalo sería mayor que el intervalo dado al 95%, ya que se disminuye la confianza.

Por tanto, el extremo izquierdo del IC sería menor que 1076.08, con lo que la media poblacional ($\mu = 1076.08$) estaría en el interior del IC al 90% de confianza. Con lo que podríamos concluir que la resolución media es de 1076.08 px, pero con un bajo nivel de confianza.

Opción B

1.- Considera el siguiente problema de programación lineal:

Minimiza la función $z = -2x - 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$-x + 3y \leq 5$$

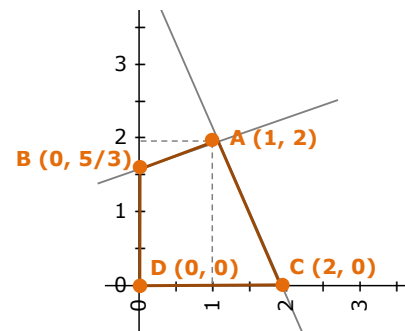
$$2x + y \leq 4$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

- Dibuja la región factible.
- Determina los vértices de la región factible.
- Indica la solución óptima del problema dado y su valor.

$$\begin{cases} -x + 3y \leq 5 \\ 2x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{cases} -x + 3y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} -x + 3y = 5 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5/3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$$



Los valores que toma la función $z = -2x - 3y$ en cada uno de los vértices:

- En el vértice A : $z(1, 2) = -8$
- En el vértice B : $z(0, 5/3) = -5$
- En el vértice C : $z(2, 0) = -4$
- En el vértice D : $z(0, 0) = 0$

Por tanto, la solución óptima está en el **vértice A**, es decir, para $x=1$ e $y=2$, z toma un valor mínimo de **-8**.

2.- Una empresa gasta un total de 1250 euros para que sus 10 empleados realicen un curso de formación. Establece tres cuantías según los niveles de formación: grado 1, grado 2 y grado 3. La empresa concede 80 euros a cada empleado que realice el de grado 1, 150 euros a cada empleado del grado 2 y 200 euros a cada empleado del grado 3. La cantidad total que la empresa gasta en el curso de formación de grado 1 es igual a la que invierte en el curso de formación de grado 3.

- Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos empleados van a realizar el curso de formación de grado 1, cuántos el de grado 2 y cuántos el de grado 3.
- Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior.

$$x = \text{nº de grado 1}$$

$$y = \text{nº de grado 2}$$

$$z = \text{nº de grado 3}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 80x + 150y + 200z = 1250 \\ 80x = 200z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 10 \\ 8x + 15y + 20z = 125 \\ 8x - 20z = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 8 & 15 & 20 & 125 \\ 8 & 0 & -20 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 8F_1 \\ F_3 - 8F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 7 & 12 & 45 \\ 0 & -8 & -28 & -80 \end{array} \right) \\ \rightarrow \xrightarrow{7F_3 + 8F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 7 & 12 & 45 \\ 0 & 0 & -100 & -200 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Es decir, 5 empleados harán el grado 1, 3 empleados el grado 2 y 2 empleados el grado 3.

3.- Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x| - t & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

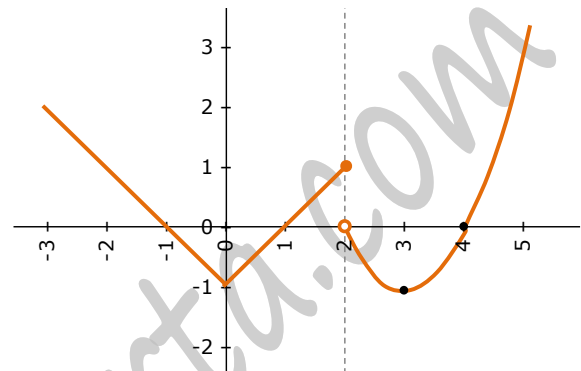
- Halla el valor de t para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 2$.
- Para $t=1$, representa gráficamente la función $f(x)$.
-

Para que sea continua $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x| - t = 2 - t \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 6x + 8 - 1 = 0 \\ f(2) = 2 - t \end{cases} \rightarrow 2 - t = 0 \rightarrow t = 2$$

Para $t=1$:

$$f(x) = \begin{cases} |x| - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



4.- En una ciudad, el registro durante cinco horas de la humedad relativa del aire, medida en %, se ajusta a la función $f(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 75$, $0 < t < 5$, siendo t el tiempo medido en horas.

- ¿A qué hora se registró la máxima cantidad de humedad relativa del aire y cuál fue dicha cantidad?
- ¿A qué hora se registró la mínima cantidad de humedad relativa del aire y cuál fue dicha cantidad?

Para que exista un extremo relativo $f'(t) = 0$. Además:

- Si $f''(t) < 0$: habrá un máximo
- Si $f''(t) > 0$: habrá un mínimo

Por tanto:

- $f'(t) = 6t^2 - 30t + 24 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = 1 \end{cases}$
- $f''(t) = 12t - 30$
- $f''(1) = -18 > 0 \rightarrow$ existe un **máximo relativo** en $t = 1 \rightarrow f(1) = 86$
- $f''(4) = 18 > 0 \rightarrow$ existe un **mínimo relativo** en $t = 4 \rightarrow f(4) = 59$

Es decir, **inicialmente**, la cantidad era **máxima (86%)** y a las **4 horas** se registró la **mínima** cantidad que fue del **59%**.

5.- En una empresa hay tres robots A, B y C dedicados a soldar productos. El 15% de los productos son soldados por el robot A, el 20% por el B y el 65% por el C. Se sabe que la probabilidad de que un producto tenga un defecto de soldadura es de 0.02 si ha sido soldado por el robot A, 0.03 por el robot B y 0.01 por el robot C.

- Elegido un producto al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga un defecto de soldadura?
- Se escoge al azar un producto y resulta tener un defecto de soldadura, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido soldado por el robot A?

- Suceso A = "soldado por el robot A" $\rightarrow P(A) = 0.15 \rightarrow P(D/A) = 0.02$
- Suceso B = "soldado por el robot B" $\rightarrow P(B) = 0.2 \rightarrow P(D/B) = 0.03$
- Suceso C = "soldado por el robot C" $\rightarrow P(C) = 0.65 \rightarrow P(D/C) = 0.01$

La probabilidad de que tenga un defecto: $P(D)$

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) = 0.15 \cdot 0.02 + 0.2 \cdot 0.03 + 0.65 \cdot 0.01 \rightarrow P(D) = 0.0155$$

La probabilidad de que si está defectuoso lo haya soldado el robot A es: $P(A/D)$

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/A) \cdot P(A)}{P(D)} = \frac{0.02 \cdot 0.15}{0.0155} \rightarrow P(A/D) = 0.193$$

6.- En un aeropuerto, el tiempo de espera de un viajero frente a la cinta transportadora hasta que sale su maleta sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 3 minutos. Se tomó una muestra aleatoria de 50 viajeros, y se observó que el tiempo medio de espera era de 17 minutos.

- Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera de la maleta en ese aeropuerto con un nivel de confianza del 95 %.
- ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 16$ con un nivel de confianza del 95%? ¿Cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza sin variar el nivel de confianza? Razona tus respuestas.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Siendo la variable continua X "tiempo de espera" con una distribución normal: $X \sim N(\mu, 13)$, el intervalo de confianza para la media es: $\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Nos dan un nivel de confianza de 0.95, por lo que el nivel de significación es $\alpha = 0.05$, por lo que el valor $Z_{\alpha/2}$ será $Z_{0.025}$:

$$P(Z < 0.025) = 1 - P(Z < 0.975) \rightarrow Z_{\alpha/2} = 1.96$$

Quedando el IC:

$$IC = \bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 17 \pm 1.96 \cdot \frac{13}{\sqrt{50}} = (13.39, 20.60)$$

El valor de 16 está dentro del IC con un nivel de confianza del 95%, por lo que sí podemos concluir que el tiempo medio de espera sea de 16 minutos.

Si queremos aumentar o disminuir la amplitud del intervalo, podríamos variar el **tamaño de la muestra**, de manera que:

- Si aumentamos n , disminuye la amplitud del intervalo, al hacerlo el radio: $Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Si disminuimos n , aumenta la amplitud del intervalo, al hacerlo el radio.