



Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado (2012)
 Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
 El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
 Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $7 \cdot I - 2 \cdot X + A \cdot X = B$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad). (0.75 puntos)
 b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $A \cdot X = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (0.75 puntos)
2. Los alumnos de 2º de Bachillerato de un centro escolar votan entre los tres posibles destinos para el viaje de fin de curso: Roma, Londres y París. El número total de votos es 120. El número de alumnos que quieren ir a Roma es el triple de la diferencia entre los que quieren ir a París y los que quieren ir a Londres. El número de alumnos que quieren ir a París es la mitad de la suma de los que quieren ir a Roma y a Londres
 a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita saber cuántos alumnos quieren ir a Roma, Londres y París respectivamente. (1.5 puntos)
 b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)
3. Se ha registrado el ruido que se produce en una cocina industrial durante 4.5 horas. La función $R(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 28$, representa el ruido medido en decibelios (db) y t el tiempo medido en horas, $0 < t < 4.5$.
 a) ¿En la primera hora ($t = 1$), cuántos decibelios se registraron? (0.25 puntos)
 b) ¿En qué momento se produce mayor ruido? ¿Cuál fue el valor máximo del ruido registrado? (1.25 puntos)
4. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \leq 1 \\ (x - 2)^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ Se pide:
 a) Estudia su continuidad en $x = 1$. (0.5 puntos)
 b) Extremos relativos en el intervalo $(1, 4)$. (0.5 puntos)
 c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento en $(1, \infty)$. (0.5 puntos)
5. En un instituto el 30 % de los alumnos juegan al baloncesto, el 25 % juegan al fútbol, y el 50 % juegan al fútbol o al baloncesto o a ambos deportes.
 a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al fútbol y juegue al baloncesto? (0.75 puntos)
 b) Si elegimos un alumno al azar y juega al baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al fútbol? (0.75 puntos)
6. Se sabe que "el peso de los paquetes de harina", que se producen en una fábrica, sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 20 gramos. Se seleccionan al azar 50 paquetes de harina y se observa que tienen un peso medio de 745 gramos.
 a) Halla el intervalo de confianza para el peso medio de los paquetes de harina de dicha fábrica con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)
 b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

A1.- Solución:

$$7 \cdot I - 2 \cdot X + A \cdot X = B \Rightarrow (-2 \cdot I + A)X = B - 7 \cdot I \Rightarrow (-2 \cdot I + A)^{-1}(-2 \cdot I + A)X = (-2 \cdot I + A)^{-1}(B - 7 \cdot I) \Rightarrow$$

$$I \cdot X = (-2 \cdot I + A)^{-1}(B - 7 \cdot I) \Rightarrow X = (-2 \cdot I + A)^{-1}(B - 7 \cdot I) \text{ cuando exista } (-2 \cdot I + A)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

La traspuesta de adjuntos multiplicada por el inverso del determinante de la matriz a invertir.

A2.- Solución:

Sea R=nº de alumnos que vota Roma, L=nº de alumnos que votan Londres y P=nº de alumnos que votan París.

$$\begin{cases} R + L + P = 120 \\ 3(P - L) = R \\ P = \frac{1}{2}(R + L) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R + L + P = 120 \\ R + 3L - 3P = 0 \\ -R - L + 2P = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R + L + P = 120 \\ -R - L + 2P = 0 \end{cases} \Rightarrow 3P = 120 \Rightarrow P = 40$$

El primer sistema es el planteamiento que piden, después he pasado todas las incógnitas al primer miembro y he ordenado, a continuación sumando la primera ecuación y la tercera y despejando, se obtiene P. Ahora sustituyo ese valor en la segunda y tercera ecuaciones y paso los números al segundo miembro:

$$\begin{cases} R + 3L = 120 \\ -R - L = -80 \end{cases} \Rightarrow 2L = 40 \Rightarrow L = 20 \text{ y sustituyendo este valor en } R + 3L = 120 \Rightarrow R = 120 - 60 = 60$$

Luego R=40, L=20 y P=60

A3.- Solución:

a) $R(1) = 1 - 9 + 24 + 28 = 44 \text{ db}$

b) Utilizaremos la derivada primera y la segunda. Buscamos el valor o valores que anulan la primera y hacen

$$R'(t) = 3t^2 - 18t + 24 \Rightarrow R'(t) = 0 \text{ cuando } t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 4 \end{cases}$$

positiva la segunda.

$$R''(t) = 6t - 18 \Rightarrow \begin{cases} R''(2) = 12 - 18 = -6 < 0 \Rightarrow (2, R(2)) \text{ es el máximo} = (2, 48) \\ R''(4) = 24 - 18 = 6 > 0 \end{cases}$$

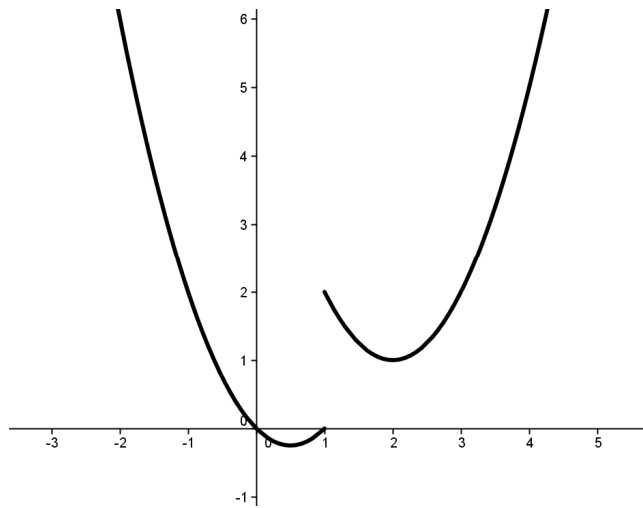
El ruido máximo se alcanza a las 2 horas y es de R(2)=48 decibelios.

A4.- Solución:

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2)^2 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ No es continua en } x = 1$$

La derivada en el intervalo (1, 4) es $f'(x) = 2(x - 2)$ que se anula sólo en $x = 2$. La derivada segunda es 2, mayor que cero. Luego hay un mínimo en $(2, f(2)) = (2, 1)$

En (1, 2) la derivada primera es negativa y la función decreciente. En (2, $+\infty$) la derivada es positiva y la función creciente.



A5.- Solución:

$P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) \Rightarrow P(F \cap B) = 0,3 + 0,25 - 0,5 = 0,05 = 5\%$ Es la probabilidad de que juegue al fútbol y al baloncesto

$$P\left(\frac{F}{B}\right) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} = \frac{0,05}{0,3} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$
 Es la probabilidad de que juegue al fútbol sabiendo que juega al baloncesto

A6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$, donde $1 - \alpha$ es el nivel de confianza (0,97 en nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, ahora 745; σ la desviación típica, ahora 20; n el tamaño de la muestra, 50.

$$1 - \alpha = 0,97 \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \alpha/2 = 0,015 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17 \text{ ya que } (1 - 0,015 = 0,985) \text{ .Ver tabla}$$

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(745 - 2,17 \frac{20}{\sqrt{50}}, 745 + 2,17 \frac{20}{\sqrt{50}}\right) = (738,86, 751,14)$$

b) Si queremos obtener un intervalo de anchura menor manteniendo el nivel de confianza podemos aumentar el tamaño de la muestra; esto hace disminuir el radio del intervalo porque hace aumentar el denominador de la fracción que aparece en él. Si no queremos cambiar el tamaño de la muestra, podemos reducir el intervalo renunciando al nivel de confianza, tomando uno menor, por ejemplo 95%. Esto hace que el factor $z_{\alpha/2}$ que aparece en el radio del intervalo disminuya y por tanto disminuye el intervalo.

Propuesta B

1. Una empresa tiene 3000 bolsas de ajo morado de Las Pedroñeras y 2000 botellas de aceite de oliva de Los Montes de Toledo. Desea elaborar dos tipos de lotes para regalo con dichos productos: lotes de tipo A formados por tres bolsas de ajos y una botella de aceite de oliva, que venderá a 50 euros; lotes de tipo B formados por una bolsa de ajos y dos botellas de aceite de oliva que venderá a 80 euros.

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) ¿Cuántos lotes de cada tipo deberá preparar para obtener la mayor cantidad de dinero? (0.5 puntos)

2. Una empresa fabrica tres modelos de lavadoras: A, B y C.

Para fabricar el modelo A se necesitan 3 horas de trabajo en la unidad de montaje, 2 horas en la unidad de acabado y 1 hora en la unidad de comprobación.

Para fabricar el modelo B se necesitan 4 horas de trabajo en la unidad de montaje, 2 horas de trabajo en la unidad de acabado y 1 hora en la unidad de comprobación.

Para fabricar el modelo C se necesitan 2 horas en la unidad de montaje, 1 hora de trabajo en la unidad de acabado y 1 hora de trabajo en la unidad de comprobación.

Sabiendo que se han empleado 430 horas en la unidad de montaje, 240 horas en la unidad de acabado y 150 horas en la unidad de comprobación. Se pide:

a) Plantea el sistema que permita saber cuántas lavadoras de cada modelo se han fabricado. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado. (0.5 puntos)

3. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Calcula los valores de las constantes a , b y c para que la gráfica de la función pase por el punto $(0, 4)$, tenga un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = -1$, y un punto de inflexión en $x = -2$. (1.5 puntos)

4. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + t & \text{si } x \leq 2 \\ (x-3)^2 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ Se pide:

a) Hallar el valor de t para que f sea continua en $x = 2$. (0.5 puntos)

b) Para $t = 0$, representa gráficamente la función f . (1 punto)

5. En una empresa se producen dos tipos de muebles: A y B, en una proporción de 2 a 3, respectivamente. La probabilidad de que un mueble de tipo A sea defectuoso es 0.05 y de que un mueble de tipo B sea defectuoso es 0.1.

a) Elegido un mueble al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso? (0.75 puntos)

b) Se escoge al azar un mueble y resulta no defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tipo B? (0.75 puntos)

6. Se estudió el cociente intelectual de 10 estudiantes de 2º de Bachillerato elegidos aleatoriamente de un determinado centro escolar, siendo estos valores: 80, 96, 87, 104, 105, 99, 112, 89, 90 y 110. Sabiendo que el cociente intelectual se distribuye según una normal con desviación típica 15. Se pide:

a) Halla el intervalo de confianza al nivel del 95 % para la media del cociente intelectual de los estudiantes de 2º de Bachillerato de dicho centro escolar. (1.25 puntos)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

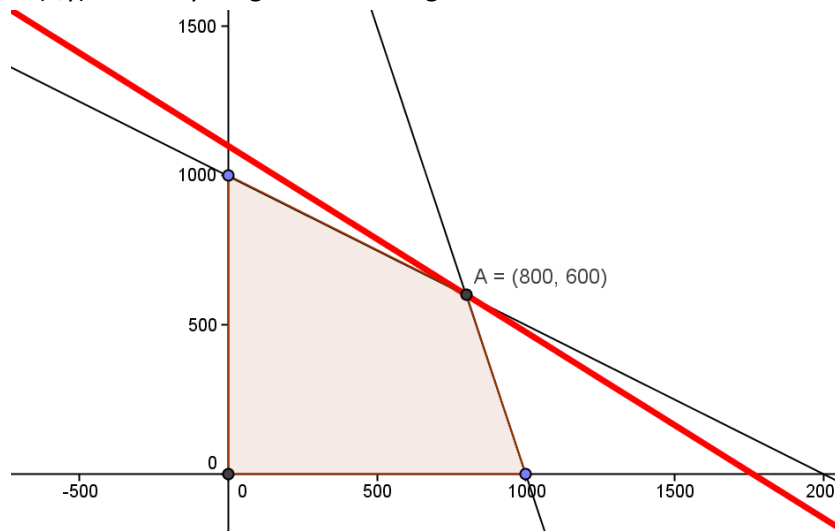
B1.- Solución:

Llamemos x al nº de lotes de tipo A e y al nº de lotes de tipo B. Las restricciones son:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 3000 \\ x + 2y \leq 2000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x + y = 3000 \\ x + 2y = 2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 6000 \\ -x - 2y = -2000 \end{cases} \Rightarrow 5x = 4000 \Rightarrow x = 800$$

$$y = 3000 - 3x \Rightarrow y = 3000 - 2400 = 600$$

La función beneficio $B(x,y)=50x+80y$. La gráfica de la región factible:



Podemos evaluar $B(x,y)$ en cada vértice de la región o considerar la recta $50x+80y=a$ que mayor valor da de a en los vértices de la región. Que es $50x+80y=88000$.

Luego la mayor cantidad de dinero se consigue con 800 lotes de tipo A y 600 de tipo B y son 88.000€

B2.- Solución:

Llamemos A al número de lavadoras de tipo A que se han fabricado, B al número de lavadoras de tipo B que se han fabricado y C al número de lavadoras de tipo C que se han fabricado:

$$\begin{cases} 3A + 4B + 2C = 430 \\ 2A + 2B + C = 240 \\ A + B + C = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + 2B = 130 \\ A + B = 90 \end{cases} \Rightarrow B = 40, A = 50 \Rightarrow C = 60$$

La 1ª menos la 3ª y la 2ª menos la 3ª

El sistema es el primero que aparece encima y la solución $A=50$, $B=40$ y $C=60$.

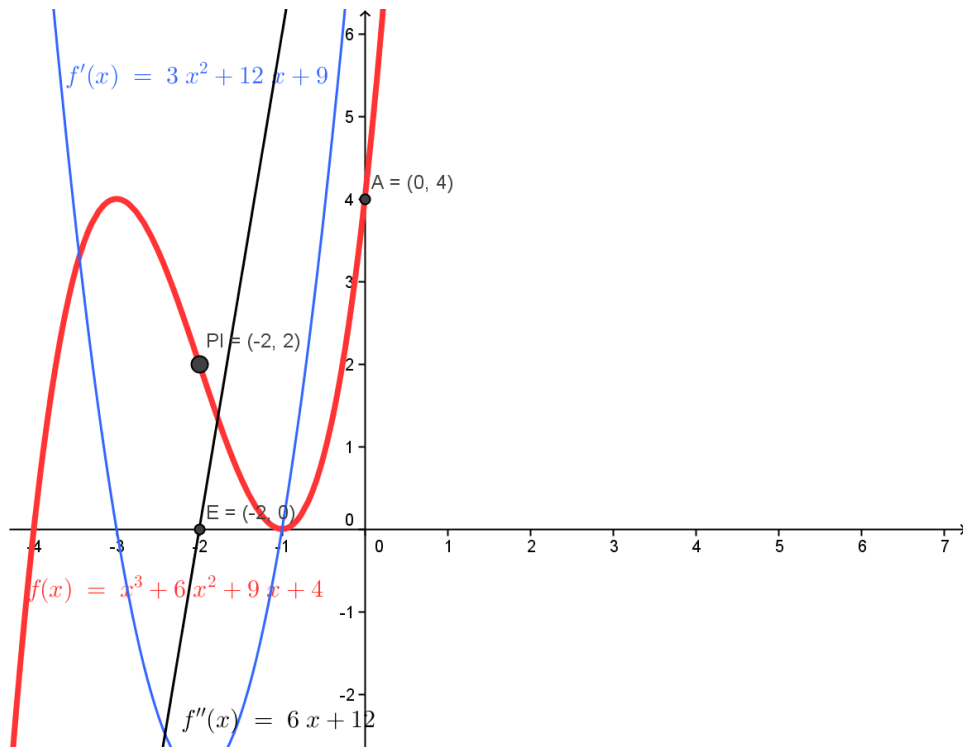
B3.- Solución:

En $x=-1$ se debe anular la derivada primera y en $x=-2$ la segunda

$$\begin{cases} f(0) = 4 \Rightarrow c = 4 \\ f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \wedge f'(-1) = 0 \Rightarrow 3 - 2a + b = 0 \\ f''(x) = 6x + 2a \wedge f''(-2) = 0 \Rightarrow -12 + 2a = 0 \Rightarrow a = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 9 \end{cases}$$

Y la función pedida es: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$

En el gráfico pueden apreciarse todos los elementos que intervienen:

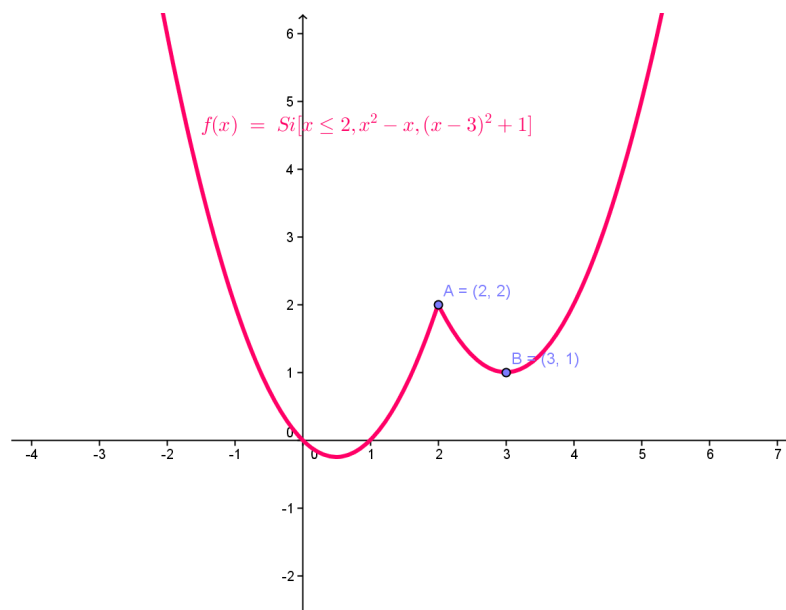


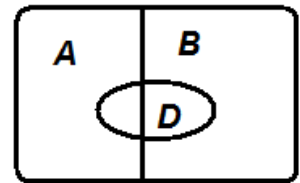
B4.- Solución:

Para ser continua debe estar definida , tener límite finito en ese punto y que el límite coincida con el valor de la función

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - x + t & \text{si } x \leq 2 \\ (x-3)^2 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 2 + t \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - x + t = 2 + t \Rightarrow t = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-3)^2 + 1 = 2 \end{cases}$$

b) Para $t=0$ quedan dos trozos de parábola, una con vértice en $(1/2, -1/2)$ y cortes con eje X en $(0,0)$ y $(1,0)$ y la otra con vértice en $(3,1)$.



B5.- Solución:

$$a) \begin{cases} P(A) + P(B) = 1 \\ \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A) + P(B) = 1 \\ 3P(A) - 2P(B) = 0 \end{cases} \Rightarrow 5P(A) = 2 \Rightarrow \begin{cases} P(A) = \frac{2}{5} \\ P(B) = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) \\ P(D/A) = \frac{P(D \cap A)}{P(A)} \end{cases} \Rightarrow P(D) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B) = 0,05 \frac{2}{5} + 0,1 \frac{3}{5} = 0,08$$

$$b) P(B/nD) = \frac{P(B \cap nD)}{P(nD)} = \frac{P(B)P(nD/B)}{P(nD)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot 0,9}{0,92} = \frac{5,4}{9,2} = 0,59$$

B6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza (0,95 en nuestro caso). } \bar{x} \text{ la media}$$

de la muestra, calculamos la media de los 10 datos y es 97,2; σ la desviación típica, ahora 15; n el tamaño de la muestra, 10.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha/2 = 0,025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96 \text{ ya que } (1 - 0,025 = 0,975). \text{ Ver tabla}$$

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(97,2 - 1,96 \frac{15}{\sqrt{10}}, 97,2 + 1,96 \frac{15}{\sqrt{10}}\right) = (87,90, 106,50)$$

b) Si queremos obtener un intervalo de anchura menor manteniendo el nivel de confianza podemos aumentar el tamaño de la muestra; esto hace disminuir el radio del intervalo porque hace aumentar el denominador de la fracción que aparece en él.