PAEG de Matemáticas Ciencias Sociales II. Castilla La Mancha. Junio 2011

Pruebas de Acceso a Enseñanzas Universitarias Oficiales de Grado
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1 *Dada la ecuación matricial:* $I + 3 \cdot X + A \cdot X = B$. *Se pide:*

a) Resuelve matricialmente la ecuación. (0.75 ptos)

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, *calcula la matriz X que cumple* $A \cdot X = I$, *donde I es la matriz identidad de orden 2. (0.75 ptos)*

2 *En una tienda de ropa figura la siguiente información: Tres pantalones cuestan lo mismo que una camisa y cuatro jerseys. Cinco pantalones cuestan lo mismo que cinco camisas y cuatro jerseys. Un pantalón, una camisa y un jersey cuestan 85 euros. Se pide:*

a) Plantea un sistema de ecuaciones que responda a las condiciones del enunciado. (1.5 ptos)

b) Determina el precio de un pantalón, de una camisa y de un jersey. (0.5 ptos)

3 *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 + 1, & si\ x \leq 0 \\ |x-1| + 1, & si\ x > 0. \end{cases}$ *Se pide:*

a) Continuidad en x = 0. (0.5 ptos)

b) Extremos relativos en el intervalo (-2,2). (1 pto)

4 *La función* $f(x) = 2x^2 + ax + b$ *tiene un mínimo en el punto (2, -5). Se pide:*

a) Determina el valor de "a" y de "b". (1 pto)

b) Para los valores hallados en el apartado anterior, escribe el intervalo en donde la función es creciente. (0.5 ptos)

5 *En una empresa se producen dos tipos de sillas: A y B, en una proporción de 1 a 3, respectivamente. La probabilidad de que una silla tipo A sea defectuosa es 0.02 y de que una silla de tipo B sea defectuosa es 0.09.*

a) ¿Cuál es la proporción de sillas defectuosas? (0.75 ptos)

b) Se escoge al azar una silla y resulta no defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tipo B? (0.75 ptos)

6 *La duración de las llamadas de teléfono, en una oficina comercial, sigue una distribución normal con desviación típica 10 segundos. Se toma una muestra aleatoria de 100 llamadas y la media de duración obtenida en esa muestra es de 50 segundos. Se pide:*

a) Calcular un intervalo de confianza al 97 % para la duración media de las llamadas. (1 pto)

b) Interpretar el significado del intervalo obtenido. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que sería válido el intervalo de confianza obtenido, si la encuesta se hubiera realizado con 100 llamadas de un único empleado?. Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Soluciones

1A.- a)

$I + 3X + AX = B \Rightarrow I + (3 + A)X = B \Rightarrow (3 + A)X = B - I \Rightarrow X = (3 + A)^{-1}(B - I)$.

Siempre que exista la inversa de 3+A se obtendrá la matriz X.

b) Como A tiene inversa ya que det(A)=3, la matriz X se obtendrá calculando esa inversa que como sabemos es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Traspuesta\ de\ adjuntos = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-7}{3} & 1 \end{pmatrix} = X$$

2A.- Llamemos p al precio de un pantalón, c al precio de una camisa y j al precio de un jersey

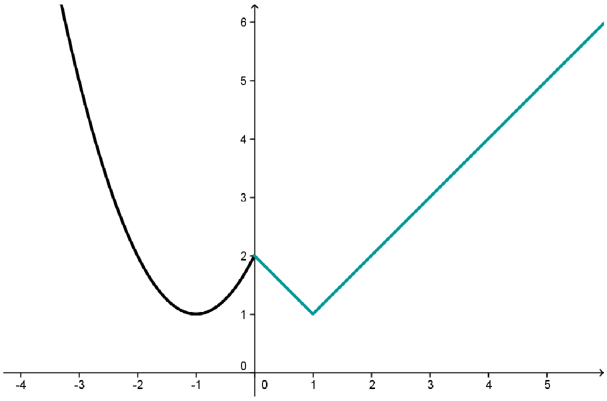
a) $\begin{cases} 3p &= c+4j \\ 5p &= 5c+4j \\ p+c+j &= 85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3p-c-4j &= 0 \\ 5p-5c-4j &= 0 \\ p+c+j &= 85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p-4c &= 0 \\ 7p+3c &= 340 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=40 \\ c=20 \end{cases}$

$40+20+j=85 \Rightarrow j=25$

b) La solución es: 40 € unos pantalones, 20 € una camisa y 25 € un jersey.

3A.-

La gráfica de la función $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2+1 & si\ x\le 0 \\ |x-1|+1 & si\ x>0 \end{cases}$



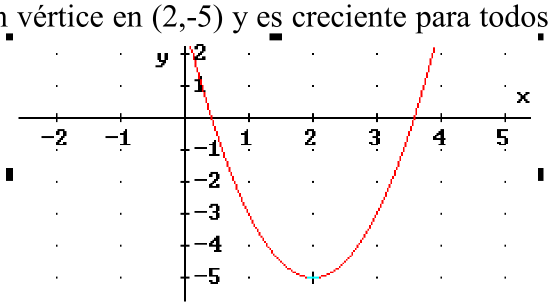
a) Es continua en x = 0 porque f(0)=2 y los límites por la izquierda y por la derecha de f(x) cuando x tiende a cero son ambos 2
b) Los extremos son: mínimo en (-1,1) que es el vértice de la parábola correspondiente al primer trozo; máximo en (0,2) porque en un entorno de centro 0, f(x) vale menos que f(0)=2; otro mínimo en (1,1) que corresponde al vértice de la uve que forma la gráfica del segundo trozo

4A.- Puesto que la función es una parábola tiene todas las derivadas que necesitemos

$$f(x)=2x^2+ax+b \Rightarrow f'(x)=4x+a \Rightarrow f''(x)=4$$

a)Tenemos que: $\begin{cases} f(2)=-5 \Rightarrow 8+2a+b=-5 \\ f'(2)=0 \Rightarrow 8+a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-8 \\ b=3 \end{cases}$

b) La función es una parábola con vértice en (2,-5) y es creciente para todos los x>2, en todos ellos la derivada es positiva.



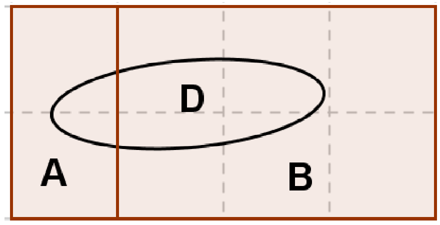
5A.- Llamemos A= elegir una silla de tipo A, B= elegir una silla de tipo B. Como están en proporción de 1 a 3, tendremos que en el total de sillas habrá un 25 % de tipo A y un 75 % de tipo B, luego al elegir una silla al azar ocurrirá que 1 de cada 4 veces será de tipo A. De otra forma: $\begin{cases} 1 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) \\ P(B) = 3P(A) \end{cases} \Rightarrow 1 = P(A) + 3P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$

Llamemos D=elegir una silla defectuosa y D'=al contrario de D. Tenemos que:

$$D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \Rightarrow P(D) = P(A).P(D/A) + P(B).P(D/B) = \frac{1}{4}\frac{2}{100} + \frac{3}{4}\frac{9}{100} = \frac{29}{400}$$

a) Por tanto la proporción de sillas defectuosas es 0.0725, un 7,25% y la de sillas no defectuosas 0.9275, un 92,75%

b) $P(D/B) = \frac{9}{100} \Rightarrow P(D'/B) = \frac{91}{100}$ y como $P(B/D') = \frac{P(B).P(D'/B)}{P(D')} = \frac{\frac{3}{4}\frac{91}{100}}{\frac{371}{400}} = \frac{273}{371}$ Luego la probabilidad pedida es 0.7358



6A.- Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$, donde 1-α es el nivel de confianza (0,97 en nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, ahora 50; σ la desviación típica, ahora 10; n el tamaño de la muestra, 100.

$1 - \alpha = 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 0{,}03 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}015 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}17$ ya que $(1 - 0{,}015 = 0{,}985)$ .Ver tabla

a)Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(50 - 2{,}17\frac{10}{10}\ ,\ 50 + 2{,}17\frac{10}{10}\right) = (47{,}83\ ,\ 52{,}17)$$

b) Podemos asegurar, con un nivel de confianza del 97 % que la duración media de una llamada realizada desde esta oficina estará entre 47,83 y 52,17 minutos.

c) Creo que no sería válido si se hubiese hecho a un solo empleado, porque supongo que unas personas tienden a ser más breves que otras, sin embargo, como es posible que los resultados numéricos coincidan por casualidad, no descarto que pudiesen coincidir. Lo que veo más difícil es que haciendo el experimento con diversos empleados coincidiesen los de cada uno con los obtenidos con la muestra aleatoria que hemos empleado aquí. En cualquier caso si realizamos los dos experimentos, de una y otra forma, podríamos salir de dudas.

Propuesta B

1 *Queremos invertir una cantidad de dinero en dos tipos de acciones y queremos que: la cantidad invertida en las acciones de tipo A no puede superar los 10000 euros, la cantidad invertida en acciones de tipo B no puede superar los 12000 euros y la suma de las cantidades invertidas no pueden exceder de 15000 euros. El interés anual estimado por las acciones de tipo A es del 10 % y el ofrecido por las acciones de tipo B es del 11 %.*

a) Dibuja la región factible. (1 pto)

b) Determina las cantidades que debe invertir en cada uno de los tipos para que el beneficio sea lo mayor posible. (0.5 ptos)

2 *Al 50 % del total de los alumnos de una clase les gusta sólo el fútbol, al 20 % del total les gusta sólo el baloncesto y el resto, que son 6 alumnos, no les gustan estos deportes. Se pide:*

a) Plantea un sistema de ecuaciones que responda a las condiciones del enunciado. (1.5 ptos)

b) Calcula el total de alumnos y el número de los aficionados al fútbol y al baloncesto. (0.5 ptos)

3 *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 6x - 8, & si\ x \leq -2 \\ 0, & si\ -2 < x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 8, & si\ x > 2 \end{cases}$ *. Se pide*

a) Límites laterales de la función f en el punto x = -2. (0.5 ptos)

b) Representación gráfica de la función f. (1 pto)

4 *La temperatura T, en grados centígrados, de una reacción química viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión* $T(t) = 10t(3-t)$*, en donde* $0 \leq t \leq 3$*. Se pide:*

a) Temperatura que habrá a los 30 minutos de comenzada la reacción. (0.25 ptos)

b) ¿En qué momento se alcanza la máxima temperatura y cuál es ésta? (1.25 ptos)

5 *Según un estudio, el 40 % de los hogares europeos tienen contratado acceso a internet, el 33 % tiene contratada televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios.*

a) Si elegimos un hogar al azar y tiene televisión por cable, ¿cuál es la probabilidad de que tenga acceso a internet? (0.75 ptos)

b) Se selecciona un hogar europeo al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios? (0.75 ptos)

??

6 *Se ha extraído una muestra de 10 familias de residentes en un barrio obteniéndose los siguientes datos: 19987, 20096, 19951, 20263, 20014, 20027, 20023, 19942, 20078, 20069. Se supone que la renta familiar de los residentes en el barrio sigue una distribución normal de desviación típica 150 euros.*

a) Encontrar el intervalo de confianza al 95 % para la renta familiar media. (1 pto)

b) Interpretar el significado del intervalo obtenido. (0.5 ptos)

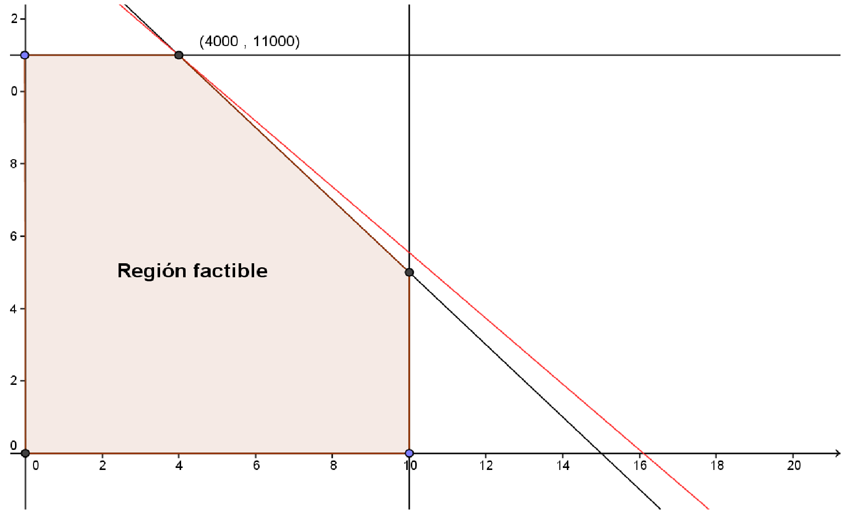
c) ¿Crees que sería válido el intervalo de confianza obtenido, si la muestra se hubiera elegido entre las familias con más ingresos del barrio?. Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Soluciones

1B.- $\begin{cases} A < 10000 \\ B < 12000 \\ A + B < 15000 \\ G(A,B) = 0.1 \cdot A + 0.11 \cdot B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,0) \\ (10000,0) \\ (10000,5000) \Rightarrow G(4000,11000) = 1610 \text{ €} \\ (4000,11000) \\ (0,11000) \end{cases}$

Las cantidades son 4000 € en A y 11000 € en B. El beneficio 1610 €



2B.-

a) **Sea x = número de alumnos que sólo les gusta el futbol, y = nº alumnos que sólo les gusta el baloncesto. Tenemos que x+y+6 es el número total de alumnos y el planteamiento:**

$$\begin{cases} 0.5(x+y+6) = x \\ 0.2(x+y+6) = y \end{cases}$$

b) La solución x = 10, y = 4, Total alumnos = 20(ver proceso siguiente)

$$\begin{cases} 0.5(x+y+6) = x \\ 0.2(x+y+6) = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 2x-6 \\ x+y = 5y-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y = -6 \\ x-4y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = 12 \Rightarrow y = 4 \\ x = y+6 \Rightarrow x = 10 \end{cases}$$

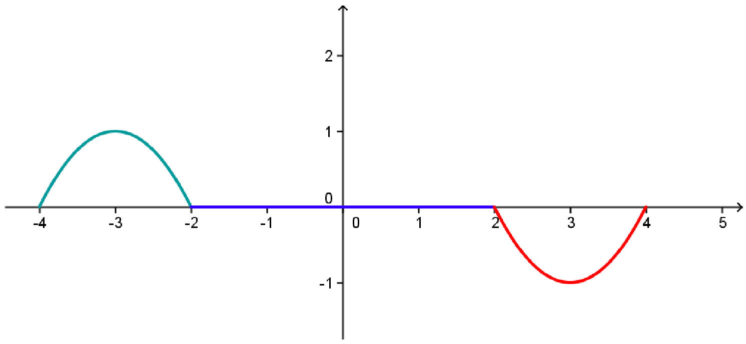
3B.- El primer trozo es parte de una parábola con el vértice en lo más alto, el segundo trozo es un segmento horizontal sobre el eje X y el tercero parte de una parábola con el vértice en lo más bajo. Hallamos los puntos de corte de las parábolas con el eje X y los vértices.

a) Los límites laterales son: $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} -x^2-6x-8 = 0 = \lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} 0$

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-6x-8=-(x+4)(x+2) & si\ x\le -2 \\ 0 & si\ -2<x\le 2 \\ x^2-6x+8=(x-2)(x-4) & si\ x>2 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -2x-6 & si\ x<-2 \\ 0 & si\ -2<x<2 \\ 2x-6 & si\ x>2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f''(x)=\begin{cases} -2 & si\ x<-2 \\ 0 & si\ -2<x<2 \\ 2 & si\ x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Máximo(-3,1) \\ \\ Mínimo(3,-1) \end{cases}$$

b) La gráfica

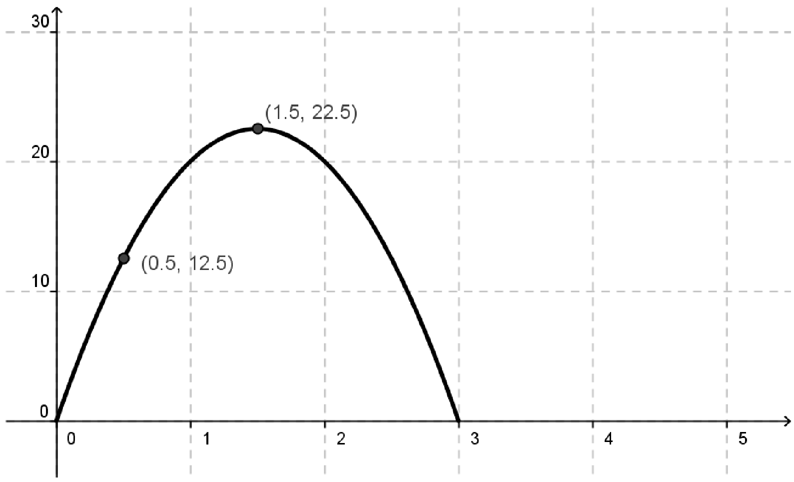


4B.-

a) $T(0.5)=10\cdot 0.5(3-0.5)=12.5$ grados centígrados, ya que 30 minutos =0.5 horas

b) $T(t)=10\cdot t(3-t) \Rightarrow T'(t)=10(3-2t) \Rightarrow T''(t)=-20$

$T'(t)=0 \Rightarrow 3-2t=0 \Rightarrow t=1.5 \Rightarrow máximo\ en\ (1.5\ ,22.5)$

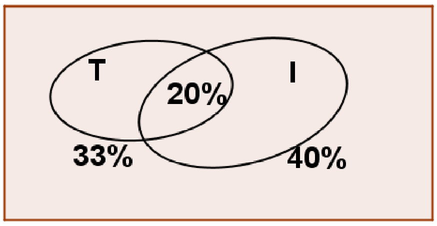


5B.- Llamemos I = tener contratado Internet, T = tener contratado televisión por cable. A los sucesos contrarios les llamaremos I' y T' respectivamente.
Ocurre que:

$$a)\ P(I/T)=\frac{P(I\cap T)}{P(T)}=\frac{20}{33}=0{,}61$$

$$P(I\cup T)=P(I)+P(T)-P(I\cap T)=0{,}40+0{,}33-0{,}20=0{,}53$$

$$b)\ P(I'\cap T')=P(I\cup T)'=1-P(I\cup T)=1-0{,}53=0{,}47$$



6B.- Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$P\left[\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=1-\alpha$, donde 1-α es el nivel de confianza (0,95 en nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, ahora 20045; σ la desviación típica, ahora 150; n el tamaño de la muestra, 10.

$1-\alpha=0{,}95\Rightarrow\alpha=0{,}05\Rightarrow\alpha/2=0{,}025\Rightarrow z_{\alpha/2}=1{,}96$ ya que $(1-0{,}025=0{,}975)$ .Ver tabla

a)Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(20045-1{,}96\frac{150}{\sqrt{10}}\ ,\ 20045+1{,}96\frac{150}{\sqrt{10}}\right)=(19952\ \ ,\ \ 20138)$$

b) Podemos asegurar, con un nivel de confianza del 95 % que la renta de una familia residente en este barrio estará entre 19952 € y 20138 €.

c) Creo que no sería válido si se hubiese hecho a las familias con más ingresos, porque los datos serían más altos y la media también, lo que nos llevaría a in intervalo distinto de extremos más altos.