

Propuesta A

1A.- a) Enuncia el Teorema de Bolzano y el Teorema de Rolle (**1 punto**)

b) Demuestra, usando el teorema de Bolzano, que existen, al menos, tres raíces reales distintas de la ecuación $f(x) = x^5 - 5x + 3 = 0$ (**1 punto**)

c) Demuestra, usando el teorema de Rolle, que la ecuación anterior no puede tener mas de tres raíces reales distintas (**0'5 puntos**)

a)

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo [**sign** $f(a) \neq \text{sign } f(b)$], entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Teorema de Rolle

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y que verifica que $f(a) = f(b)$; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

b)

Sea $f(x) = x^5 - 5x + 3 = 0$, sabemos que esta función es continua en todo su dominio que es la recta real y el intervalo, entre otros, $[0, 1]$ toma valores, en los extremos de dicho intervalo:

$$f(0) = 0^5 - 5 \cdot 0 + 3 = 3 > 0 \text{ y } f(1) = 1^5 - 5 \cdot 1 + 3 = -1 < 0$$

con signo diferentes, [**sign** $f(0) \neq \text{sign } f(1)$], por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$ que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que

$$f(c) = c^5 - 5c + 3 = 0$$

En el intervalo $[1, 2]$ toma valores, en los extremos de dicho intervalo:

$$f(1) = 1^5 - 5 \cdot 1 + 3 = -1 < 0 \text{ y } f(2) = 2^5 - 5 \cdot 2 + 3 = 32 - 10 + 3 = 25 > 0$$

con signo diferentes, [**sign** $f(1) \neq \text{sign } f(2)$], por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $h \in (1, 2)$ tal que $f(h) = 0$ que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que

$$f(h) = h^5 - 5h + 3 = 0$$

En el intervalo $[0, -2]$ toma valores, en los extremos de dicho intervalo:

$$f(-2) = (-2)^5 - 5 \cdot (-2) + 3 = -32 + 10 + 3 = -19 < 0 \text{ y } f(0) = 0^5 - 5 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$$

con signo diferentes, [**sign** $f(-2) \neq \text{sign } f(0)$], por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $j \in (-2, 0)$ tal que $f(j) = 0$ que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que

$$f(j) = j^5 - 5j + 3 = 0$$

c)

Comprobemos que la función $f(x) = x^5 - 5x + 3 = 0$ únicamente puede tener las raíces reales detectadas

Veamos ahora mediante el teorema de Rolle y trabajando por reducción al absurdo que estas raíces son única.

Supongamos que $f(x)$ tiene una cuarta raíz k , tales que $f(c) = f(k) = 0$, no perteneciendo k al intervalo $[-2, 1]$ en donde hemos buscado soluciones

Como $f(x)$ es una función exponencial y polinómica, es continua y derivable en toda la recta real, o sea en el intervalo $[c, k]$ y además toma el mismo valor en los extremos de dicho intervalo por lo que aplicando el teorema de Rolle, tenemos que existe, al menos, un punto $x_0 \in (c, k)$ tal que $f'(x_0) = 0$

Continuación del Problema 1A

La derivada de esta función es $f'(x) = 5x^4 - 5$; así, para determinar el punto x_0 tendremos que igualar su derivada a cero,

$$5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow 5x^4 = 5 \Rightarrow x^4 = \frac{5}{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \in [-2, 1] \\ x = -1 \in [-2, 1] \end{cases}$$

Esta ecuación no tiene una cuarta solución en el campo de los números reales, ya que, de haberla, debía de estar fuera del intervalo estudiado y los valores que anulan a la derivada (máximos o mínimos relativos) se encuentran en el intervalo en donde hemos detectado las tres raíces

2A.- Calcula las siguientes integrales $\int \text{sen}^2 x \cos x \, dx$ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$ **(1'25 puntos por integral)**

$$\int \text{sen}^2 x \cos x \, dx = \int t^2 \, dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + K$$

$$\text{sen } x = t \Rightarrow \cos x \, dx = dt$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx = \int e^u \cdot 2 \, du = 2e^u = 2e^{\sqrt{x}} + K$$

$$\sqrt{x} = u \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = du \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \, du$$

3A.- Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcular el valor de los determinantes

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

indicando las propiedades que usas en cada caso para justificar tu respuesta **(1'25 puntos por determinante)**

$$\begin{vmatrix} b & b+a & 2c \\ e & e+d & 2f \\ h & h+g & 2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b & 2c \\ e & e & 2f \\ h & h & 2i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a & 2c \\ e & d & 2f \\ h & g & 2i \end{vmatrix} \quad (I) = 0 + 2 \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} \quad (II) = 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad (III) = (-2) \cdot 5 = -10$$

(I) Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz se descomponen en suma de dos sumandos, su det er min ante tambien se descompone en suma de los det er min antes

(II) Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales su det er min ante es igual a cero

(III) Si permutamos dos filas o columnas de una matriz su det er min ante cambia de signo

$$\begin{vmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ d+g & e+h & f+i \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad (IV) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad (I) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0(II) = 5$$

(IV) Si una fila o una columna de una matriz se le suma o resta una combinación lineal de las otras filas o columnas, el det er min ante de la matriz resul tan te coincide con el del inicial

4A.- Dado el plano $\pi \equiv x + y + 2z = 7$ y el punto $\mathbf{P}(1, 0, 0)$

a) Calcula el punto \mathbf{Q} de π que hace mínima la distancia a \mathbf{P} (**1'25 puntos**)

b) Calcula el punto simétrico \mathbf{P}' de \mathbf{P} respecto del plano π (**1'25 puntos**)

a) Hallaremos una recta \mathbf{r} perpendicular al plano que pase por el punto \mathbf{P} , recta determinada por dicho punto y por el vector director del plano que es el de la recta. El punto de intersección de \mathbf{r} con el plano π es el punto \mathbf{Q} buscado

$$\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (1, 1, 2) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \text{Intersección de } r \text{ con } \pi \Rightarrow 1 + \lambda + \lambda + 2 \cdot 2\lambda = 7 \Rightarrow 6\lambda = 6 \Rightarrow$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow Q \begin{cases} x = 1 + 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow Q(2, 1, 2)$$

b) El punto \mathbf{Q} es el punto medio entre \mathbf{P} y su simétrico \mathbf{P}'

$$\begin{cases} 2 = \frac{1 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 1 + x_{P'} = 4 \Rightarrow x_{P'} = 3 \\ 1 = \frac{0 + y_{P'}}{2} \Rightarrow y_{P'} = 2 \\ 2 = \frac{0 + z_{P'}}{2} \Rightarrow z_{P'} = 4 \end{cases} \Rightarrow P'(3, 2, 4)$$

Propuesta B

1B.- Dada la función $f(x) = \frac{ax^2 + b}{2x + 6}$ calcula los parámetros $a, b \in \mathfrak{R}$ sabiendo que:

- $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de pendiente 2

- $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 0$ (2'5 puntos)

$$2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2 + b}{2x + 6}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + b}{2x^2 + 6x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2}{x^2} + \frac{b}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{6x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x^2}}{2 + \frac{6}{x}} = \frac{a + \frac{b}{\infty}}{2 + \frac{6}{\infty}} = \frac{a + 0}{2 + 0} = \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

$$f'(x) = \frac{2ax(2x+6) - 2(ax^2 + b)}{(2x+6)^2} = \frac{4ax^2 + 12ax - 2ax^2 - 2b}{(2x+6)^2} = \frac{2ax^2 + 12ax - 2b}{(2x+6)^2} = 2 \cdot \frac{ax^2 + 6ax - b}{(2x+6)^2}$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{a \cdot 0^2 + 6a \cdot 0 - b}{(2 \cdot 0 + 6)^2} = 0 \Rightarrow 2 \cdot \frac{0 + 0 - b}{(0 + 6)^2} = 0 \Rightarrow -\frac{2b}{36} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$f(x) = \frac{4x^2}{2x+6}$$

2B.- Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 1$ (2'5 puntos)

$$\text{Punto de corte entre funciones} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 1 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3+1}{2} = 2 \\ x = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$x = \frac{1}{2} \in (0, 1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1 + 1 = \frac{1-6+16}{8} = \frac{11}{8} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{11}{8} > 1$$

$$x = \frac{3}{2} \in (1, 2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{27}{8} - \frac{27}{4} + 3 + 1 = \frac{27-54+32}{8} = \frac{5}{8} \\ g\left(\frac{3}{2}\right) = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{5}{8} < 1$$

$$A = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx - \int_0^1 dx + \int_1^2 dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx - \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot [x^4]_0^1 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^1 - \frac{1}{4} \cdot [x^4]_1^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_1^2$$

$$A = \frac{1}{4} \cdot (1^4 - 0^4) - (1^3 - 0^3) + (1^2 - 0^2) - \frac{1}{4} \cdot (2^4 - 1^4) + (2^3 - 1^3) - (2^2 - 1^2) = \frac{1}{4} - 1 + 1 - \frac{15}{4} + 7 - 3 = \frac{1}{2} u^2$$

3B.- a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax - 3z = a \quad \text{(1'5 puntos)} \\ 2x + ay - z = a \end{cases}$$

b) Resuélvelo para el valor $a = 1$ (1 punto)

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & -3 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = -6 + 2a^2 + 3a + a = 2a^2 + 4a - 6 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 2a^2 + 4a - 6 = 0 \Rightarrow 2(a^2 + 2a - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \geq 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-2+4}{2} = 1 \\ a = \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{-3, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $a = -3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = -2 \Rightarrow$$

$$z = -\frac{2}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas}$$

Sistema Compatible Indeterminado

b)

Si $a = 1 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

$$-y - 5z = 1 \Rightarrow y = -1 - 5z \Rightarrow x + (-1 - 5z) + 2z = 0 \Rightarrow x - 1 - 5z + 2z = 0 \Rightarrow x = 1 + 3z$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (1 + 3\lambda, -1 - 5\lambda, \lambda)$$

4.B.- Dado el punto $P(1, 0, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$

a) Da unas ecuaciones paramétricas de la recta s que pase por P y corta perpendicularmente a r (1'25 puntos)

b) Calcula la distancia de P a r (1'25 punto)

a) El producto escalar del vector director de la recta r y el formado por el punto P y por el punto genérico R de la misma recta r es nulo ya que son rectas perpendiculares. Con el dato hallado tendremos el vector director de la recta s buscada

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (2, 1, 0) \\ \vec{PR} = (2\lambda, 3 + \lambda, -1) - (1, 0, 0) = (2\lambda - 1, 3 + \lambda, -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{PR} \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{PR} = 0 \Rightarrow$$

$$(2, 1, 0) \cdot (2\lambda - 1, 3 + \lambda, -1) = 0 \Rightarrow 4\lambda - 2 + 3 + \lambda = 0 \Rightarrow 1 + 5\lambda = 0 \Rightarrow 5\lambda = -1 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\vec{v}_s = \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - 1, 3 + \left(-\frac{1}{5}\right), -1 \right] = \left[-\frac{2}{5} - 1, 3 - \frac{1}{5}, -1 \right] = \left[-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, -1 \right] \equiv (-7, 14, -5) \equiv (7, -14, 5) \Rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + 7\mu \\ y = -14\mu \\ z = 5\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathfrak{R}$$

b) La distancia pedida es la de P al punto de corte S de las rectas r y s que se puede hallar con el valor del parámetro buscado

$$S \begin{cases} x = 2 \left(-\frac{1}{5}\right) \\ y = 3 + \left(-\frac{1}{5}\right) \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow S \left(-\frac{2}{5}, \frac{14}{5}, -1\right) \Rightarrow d(P, S) = \sqrt{\left[1 - \left(-\frac{2}{5}\right)\right]^2 + \left(0 - \frac{14}{5}\right)^2 + [0 - (-1)]^2}$$

$$d(P, S) = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{14}{5}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \frac{196}{25} + 1} = \sqrt{\frac{49 + 196 + 25}{25}} = \sqrt{\frac{270}{25}} = \frac{\sqrt{270}}{5} = \frac{3\sqrt{30}}{5} u$$