

Propuesta A

1A.- a) Determinar el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = (x-a)e^x$ tenga un mínimo relativo en $x = 0$. Razona que, de hecho, es un mínimo absoluto (**1'25 puntos**)

b) Para el valor de a obtenido, calcula los puntos de inflexión de la función $f(x)$ (**1'25 puntos**)

a)

$$f'(x) = e^x + (x-a)e^x = (x-a+1)e^x \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow (0-a+1)e^0 = 0 \Rightarrow (-a+1) \cdot 1 = 0 \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow a=1$$

$$f''(x) = e^x + e^x + (x-1)e^x = (x-1+2)e^x = (x+1)e^x \Rightarrow f''(0) = (0+1)e^0 = 1 \cdot 1 = 1 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

$$\text{Mínimo relativo en } x=0 \Rightarrow f(0) = (0-1)e^0 = -1$$

Veamos que valores tiene la función en los extremos de ella, al no limitarse el intervalo de búsqueda, en mas y menos infinito, si hay valores menores que $f(0)$ entonces esos son los valores mínimos absolutos.

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \infty \cdot e^\infty > f(0)$$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x-1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x-1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{e^x} = -\frac{1}{\infty} = 0 > -1$$

Por lo tanto en $x=0$ hay un mínimo absoluto

b)

$$f''(x) = (x+1)e^x \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow (x+1)e^x = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$f'''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+1+1)e^x = (x+2)e^x \Rightarrow f'''(-1) = (-1+2)e^1 = e \neq 0 \Rightarrow$$

$$\text{Punto de inflexión en } x=-1 \Rightarrow f(-1) = (-1-1)e^{-1} = -\frac{2}{e}$$

2A.- Calcula la integral $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx$ (**2'5 puntos**)

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \Rightarrow \text{Por Ruffini} \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 8 & -4 \\ 2 & & 2 & -6 & 4 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrr} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0$$

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)}{(x-2)^2}$$

$$A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1) = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow A(1-2)^2 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \Rightarrow A = -1 \\ x=2 \Rightarrow C(2-1) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow C = -1 \\ x=0 \Rightarrow 4A + 2B - C = 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 \Rightarrow 4A + 2B - C = 1 \end{cases}$$

$$4 \cdot (-1) + 2B - (-1) = 1 \Rightarrow -4 + 2B + 1 = 1 \Rightarrow 2B = 4 \Rightarrow B = 2$$

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{-1}{(x-2)^2} \Rightarrow I = \int \frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} dx = -\int \frac{dx}{x-1} + 2 \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{(x-2)^2} =$$

$$\begin{cases} x-1=t \Rightarrow dx=dt \\ x-2=u \Rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$I = -\int \frac{dt}{t} + 2 \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u^2} = -\ln t + 2 \ln u - \int u^{-2} du = \ln \frac{u^2}{t} - \frac{1}{(-1)} \cdot u^{-1} = \ln \frac{(x-2)^2}{(x-1)} + \frac{1}{x-2} + K$$

3A.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 4 & k \\ 0 & 5k & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Calcula en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$ el rango de la matriz **A** (1 punto)
 b) ¿Existe algún valor de $k \in \mathbb{R}$ para el cual el sistema $AX = O$ sea incompatible? (0'75 puntos)
 c) Para que valores de $k \in \mathbb{R}$ el sistema $AX = O$ es compatible indeterminado (0'75 puntos)

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 4 & k \\ 0 & 5k & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & k \\ 0 & 5 & k \\ 0 & 5k & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5k-5 & 1-k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5k-5=0 \Rightarrow 5k=5 \Rightarrow k=1 \\ 1-k=0 \Rightarrow k=1 \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

$$\text{Cuando } k = 1 \Rightarrow \text{rang}(A) = 2$$

b)

El sistema queda reducido a tres ecuaciones ya que la tercera es combinación lineal de las otras

No hay ningún valor de k que haga el sistema incompatible ya que una ecuación homogénea solo tiene soluciones compatibles determinadas o indeterminadas

c)

Cuando $k = 1$, el sistema es compatible indeterminado ya que

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas}$$

Solución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 5y + z = 0 \Rightarrow z = -5y \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (\lambda, \lambda, -5\lambda)$$

4A.- Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

a) Determinar su posición relativa. **(1'25 puntos)**

b) Hallar el ángulo que forman sus vectores directores **(1'25 puntos)**

a) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.

Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 1 - y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = t \\ \lambda = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - t = -1 \\ \lambda + t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Dos filas iguales} \\ s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 2 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Pueden ser rectas coincidentes o cortarse

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, -1) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow \text{No son proporcionales} \Rightarrow \text{Las rectas se cortan en un punto}$$

b)

$$\cos \alpha =$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, -1) \\ \vec{v}_s = (1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow \text{No son proporcionales} \Rightarrow \text{Las rectas se cortan en un punto}$$

b)

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{|(1, 1, -1) \cdot (1, -1, 1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|1 - 1 - 1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{|-1|}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70^\circ 31' 44''$$

Propuesta B**1B.- a)** Enuncia el teorema de Bolzano y el de Rolle (**1 punto**)b) Demuestra que la ecuación $e^x + x^7 = 0$ tiene al menos una solución real (**0'75 puntos**)c) Demuestra, que de hecho, esa solución es única (**0'75 puntos**)

a)

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f(b)]$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Teorema de Rolle

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y que verifica que $f(a) = f(b)$; entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

b)

Sea $f(x) = e^x + x^7$, sabemos que esta función es continua en todo su dominio que es la recta real y el intervalo, entre otros, $[-1, 1]$ toma valores, en los extremos de dicho intervalo:

$$f(-1) = e^{-1} + (-1)^7 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0 \quad \text{y} \quad f(1) = e^1 + 1^7 = 1 + e > 0$$

con signo diferentes, $[\text{sign } f(-1) \neq \text{sign } f(1)]$, por lo tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$ que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que $e^c + c^7 = 0$

c)

Comprobemos que la función $f(x) = e^x + x^7$ únicamente puede tener una raíz real

La función $f(x) = e^x + x^7$ es continua en toda la recta real, y los valores en sus extremos son:

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + x^7) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^{-x} + (-x)^7] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^x} - x^7 \right) = \frac{1}{e^\infty} - \infty^7 = 0 - \infty = -\infty < 0 \quad \text{y}$$

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x^7) = e^\infty + \infty^7 = \infty + \infty = \infty > 0 \quad \text{con signo diferentes, } [\text{sign } f(-\infty) \neq \text{sign } f(\infty)], \text{ por lo}$$

tanto existe, según el teorema de Bolzano, al menos, un punto $c \in (-\infty, \infty)$ tal que $f(c) = 0$ que es una solución real de la función o lo que es lo mismo que $e^c + c^7 = 0$.

Veamos ahora mediante el teorema de Rolle y trabajando por reducción al absurdo que esta raíz es única.

Supongamos que $f(x)$ tiene dos raíces c y d , tales que $f(c) = f(d) = 0$

Como $f(x)$ es una función exponencial y polinómica, es continua y derivable en toda la recta real, o sea en el intervalo $[c, d]$ y además toma el mismo valor en los extremos de dicho intervalo por lo que aplicando el teorema de Rolle, tenemos que existe, al menos, un punto $x_0 \in (c, d)$ tal que $f'(x_0) = 0$

La derivada de esta función es $f'(x) = e^x + 7x^6$; así, para determinar el punto x_0 tendremos que igualar su derivada a cero, y además teniendo en cuenta que $e^x > 0$ para todo valor de la recta real tenemos:

$$e^x + 7x^6 = 0 \Rightarrow 7x^6 = -e^x \Rightarrow x^6 = -\frac{e^x}{7} \Rightarrow x = \sqrt[6]{-\frac{e^x}{7}} \Rightarrow \text{Sin solución.}$$

Esta ecuación no tiene solución en el campo de los números reales, por lo tanto hemos obtenido una contradicción y así, no es posible que la función tenga dos raíces en todo el campo de los números reales quedando demostrado que solo tiene una raíz real en el intervalo $(-\infty, \infty)$ tal como queríamos demostrar

2.B.- Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$ con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Calcular el valor del parámetro a para que el área encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ sea $\frac{32}{3}$ **(2'5 puntos)**

$$\text{Punto de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{a} \\ x = \sqrt{a} \end{cases}$$

$$\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} a \, dx - \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} x^2 \, dx = \frac{32}{3} \Rightarrow a \cdot [x]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} - \frac{1}{3} [x^3]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = \frac{32}{3} \Rightarrow a \cdot [\sqrt{a} - (-\sqrt{a})] - \frac{1}{3} [(\sqrt{a})^3 - (-\sqrt{a})^3] = \frac{32}{3}$$

$$2a\sqrt{a} - \frac{1}{3} 2a\sqrt{a} = \frac{32}{3} \Rightarrow \frac{6a\sqrt{a} - 2a\sqrt{a}}{3} = \frac{32}{3} \Rightarrow 4a\sqrt{a} = 32 \Rightarrow a\sqrt{a} = 8 \Rightarrow (a\sqrt{a})^2 = 8^2 \Rightarrow a^2 a = 64 \Rightarrow a^3 = 64 \Rightarrow a = \sqrt[3]{64} = 4$$

3B.- a) Clasifica, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y = -1 \\ x + 2y + mz = m + 3 \end{cases}$$

(1'5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $m = 7$ **(1 punto)**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = -3m + 4 + 3 + 2m = -m + 7 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -m + 7 = 0 \Rightarrow m = 7$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{7\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $m = 7$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 7 & 10 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{La tercera ecuación es combinación lineal de}$$

las otras dos $\Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

b)

Si $m = 7 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow y + 2z = 3 \Rightarrow y = 3 - 2z \Rightarrow x - (3 - 2z) + z = 1 \Rightarrow x - 3 + 3z = 1 \Rightarrow x = 4 - 3z$$

Solución $\Rightarrow (x, y, z) = (4 - 3\lambda, 3 - 2\lambda, \lambda)$

4.B.- Consideremos el plano $\pi \equiv x - ky = 0$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$

- a) Halla el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para que el plano π y la recta r sean paralelos **(1'5 puntos)**
 b) Para el valor de k obtenido, calcula la distancia desde la recta r al plano π **(1 punto)**

a) El producto escalar de los vectores directores de la recta y el plano es nulo ya que son perpendiculares

$$x = 1 + y \Rightarrow 1 + y + y - z = 3 \Rightarrow 2y - z = 2 \Rightarrow z = 2y - 2 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 2) \\ \vec{v}_\pi = (1, -k, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0 \Rightarrow (1, 1, 2) \cdot (1, -k, 0) = 0 \Rightarrow 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$$

b) La distancia de la recta al plano es la de cualquiera de uno de sus puntos R al plano (tomaremos el indicado en la ecuación)

$$x = 1 + y \Rightarrow 1 + y + y - z = 3 \Rightarrow 2y - z = 2 \Rightarrow z = 2y - 2 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 2) \\ \vec{v}_\pi = (1, -k, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0 \Rightarrow (1, 1, 2) \cdot (1, -k, 0) = 0 \Rightarrow 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$$

$$\begin{cases} R(1, 0, -2) \\ \pi \equiv x - y = 0 \end{cases}$$

$$d(r, \pi) = d(R, \pi) = \frac{|1 - 0|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$$