

Propuesta A

1. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula la matriz $M = (3 \cdot I + A^2)$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 pts)

b) Calcula la matriz X tal que $X \cdot B = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (0.75 pts)

2. Tres amigos van juntos a una papelería. Luis compra 3 cuadernos, 2 carpetas y 4 bolígrafos y paga 29 euros. Carmen compra 4 carpetas y 6 bolígrafos y tiene que pagar 38 euros. Pedro gasta 39 euros en comprar 5 cuadernos y 3 carpetas.

a) Plantea el sistema que permita averiguar el precio de cada cuaderno, carpeta y bolígrafo. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x + 1 - t & \text{si } x \leq 0 \\ |x - 2| - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 0$. (0.5 pts)

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

4. La velocidad del viento, medida en Km/h, durante una travesía marítima de 5 días de duración, viene dada por la función $v(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 26$, siendo t el tiempo medido en días, $0 \leq t \leq 5$.

a) ¿Qué día el viento alcanzó su velocidad máxima y cuál fue su valor? (1 punto)

b) ¿Cuándo el viento alcanzó su velocidad mínima y cuál fue este valor mínimo? (0.5 puntos)

5. El 15 % de los estudiantes matriculados en una determinada asignatura de un instituto de educación secundaria practican algún deporte. El 10 % de los alumnos que practican algún deporte obtienen una calificación de sobresaliente en dicha asignatura. Mientras que el 5 % de los alumnos que no practican ningún deporte obtienen el sobresaliente.

a) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido un sobresaliente en la citada asignatura? (0.75 puntos)

b) Sabiendo que un alumno elegido al azar ha obtenido un sobresaliente, ¿cuál es la probabilidad de que practique algún deporte? (0.75 puntos)

6. Una empresa sabe que el tiempo que tardan sus empleados en realizar un test psicotécnico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 4$ minutos. Se eligen al azar 10 empleados y se contabiliza el tiempo que tardan en realizar dicho test, siendo estos tiempos: 40, 42, 48, 51, 52, 54, 59, 61, 63 y 70 minutos respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la duración media poblacional en realizar dicho test psicotécnico, con un nivel de confianza del 95 %. (1.25 puntos)

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

A1.- Solución

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -4 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow M = 3I + A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -4 & 13 & 3 \\ 1 & 1 & 20 \end{pmatrix}$$

$$b) X \cdot B = I \Rightarrow X = B^{-1} \Rightarrow \left\{ B^{-1} = \frac{1}{|B|} (\text{transpuesta de adjuntos de } B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right.$$

A2.- Solución

Llamaremos x al precio de un cuaderno, y al de una carpeta y z al de un bolígrafo

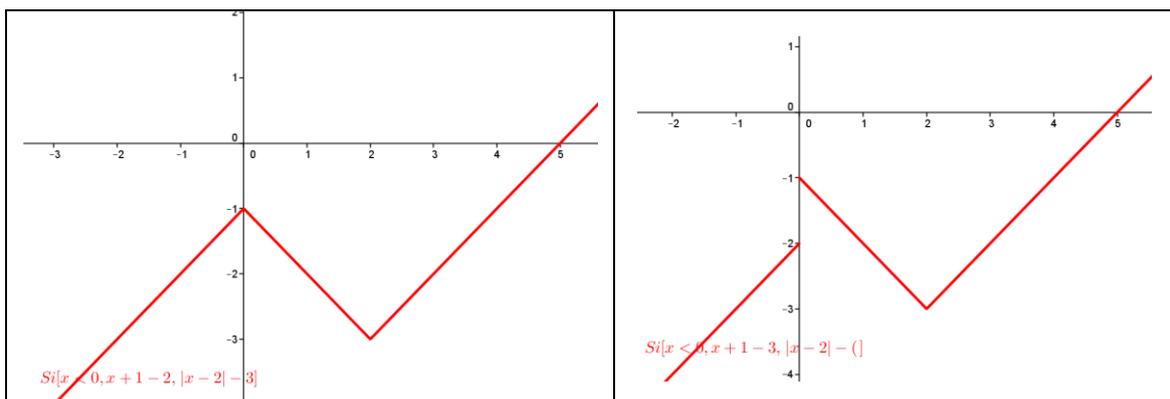
$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 29 \\ 4y + 6z = 38 \\ 5x + 3y = 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^{\text{a}} \text{ menos } 2^{\text{a}} \text{ dividida por } 2 \\ 3x + 2y + 4z = 29 \Rightarrow 3x + z = 10 \\ -2y - 3z = -19 \\ -\frac{3}{2}(4y + 6z = 38) \Rightarrow \begin{cases} -6y - 9z = -57 \\ 10x + 6y = 78 \end{cases} \Rightarrow 10x - 9z = 21 \\ 2(5x + 3y = 39) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9(3x + z = 10) \\ 10x - 9z = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27x + 9z = 90 \\ 10x - 9z = 21 \end{cases} \Rightarrow 37x = 111 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 8 \\ z = 1 \end{cases}$$

A3.- Solución

$$a) f(x) = \begin{cases} x + 1 - t \text{ si } x \leq 0 \\ |x - 2| - 3 \text{ si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 - t \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + 1 - t = 1 - t \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x - 2| - 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Para continua en } x = 0 \\ 1 - t = -1 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

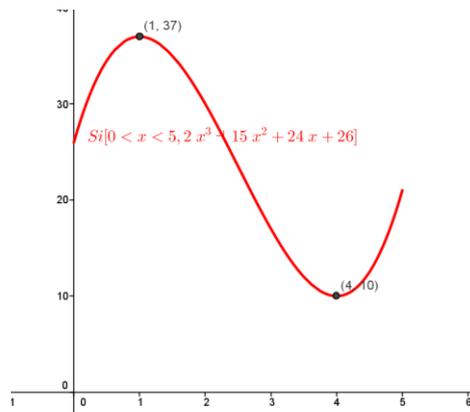
$$b) f(x) = \begin{cases} x - 1 \text{ si } x \leq 0 \text{ es una recta} \\ |x - 2| - 3 \text{ si } x > 0 \text{ es una especie de v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - 1 \text{ si } x \leq 2 \\ x - 5 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$



A4.- Solución

Empleamos el teorema que dice: si $v(t)$ es tal que en $t=a$ la derivada primera es 0, $v'(a)=0$, y la segunda es positiva, $v''(a)>0$, hay mínimo en $(a,v(a))$, y si la primera es 0 y la segunda negativa hay máximo en $(a,v(a))$

$$\begin{cases} v'(t) = 6t^2 - 30t + 24 \\ v''(t) = 12t - 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'(t) = 0 \\ t^2 - 5t + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v''(4) = 18 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}(4,10) \\ v''(1) = -18 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}(1,37) \end{cases}$$



A5.- Solución

Consideremos los sucesos: D elegir un alumno al azar y resulte que practica deporte, S elegir un alumno al azar y resulte que tiene sobresaliente. Sabemos que $p(D)=0,15$.

$$p(S/D) = 0,1, \quad p(S/nD) = 0,05$$

$$\begin{aligned} a) p(S) &= P((D \cap S) \cup (nD \cap S)) = P(D \cap S) + P(nD \cap S) = \\ a) &= P(S/D) \cdot P(D) + P(S/nD) \cdot P(nD) = 0,1 * 0,15 + 0,05 * 0,85 = 0,0575 \end{aligned}$$

$$b) P(D/S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} = \frac{0,1 * 0,15}{0,0575} = 0,26 = 26\%$$

A6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza (0,95 en$$

nuestro caso). \bar{x} la media de la muestra, calculamos la media de los 10 datos y es 54; σ la desviación típica, ahora 4; n el tamaño de la muestra, 10.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0,025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96 \text{ ya que } (1 - 0,025 = 0,975). \text{ Ver tabla}$$

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(54 - 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{10}}, 54 + 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} \right) = (51,52, 56,48)$$

b) El error viene dado por el radio del intervalo de confianza

$$z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow 1,96 \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow n > (1,96 \cdot 4)^2 = 61,46 \Rightarrow n = 62$$

Propuesta B

1. Una empresa tiene 160 kilos de arroz de Calasparra y 60 tarros de 2 gramos de azafrán de La Mancha. Desea elaborar dos tipos de lotes para regalo con dichos productos: lotes de tipo A formados por tres kilos de arroz y dos tarros de azafrán, que venderá a 50 euros; lotes de tipo B formados por 5 kilos de arroz y un tarro de azafrán que venderá a 30 euros.

a) Plantea el problema de programación lineal que permita averiguar cuántos lotes de cada tipo deberá preparar la empresa para obtener la mayor cantidad de dinero posible. (0.75 puntos)

b) Dibuja la región factible y determina los vértices. (0.5 puntos)

c) Calcula la solución óptima del problema. (0.25 puntos)

2. En un hogar se gastó al mes en agua, luz y teléfono, un total de 180 euros. La suma de los recibos del agua y del teléfono coincidió con la factura de la luz. Y la factura de la luz fue el triple que la del agua.

a) Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones que nos permita obtener el gasto de agua, luz y teléfono respectivamente en dicho hogar. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+t)^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ (x-t)^2 + 2t - 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0.5 pts)

b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.5 pts)

c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 pts)

4. Calcula los valores de los parámetros a y b para que la función $f(x) = ax^2 + 2x + b$ tenga un máximo en el punto $(1, 3)$. (1.5 puntos)

5. En una empresa se producen dos modelos de un determinado producto: A y B. El 10% de los productos son del modelo A y el 90% del modelo B. La probabilidad de que un producto del modelo A sea defectuoso es 0.02 y de que un producto del modelo B sea defectuoso es 0.01.

a) Elegido un producto al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso? (0.75 puntos)

b) Se escoge al azar un producto y resulta no defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo A? (0.75 puntos)

6. En una población, se sabe que el consumo anual de electricidad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 650$ KWh. Se tomó una muestra aleatoria de 100 viviendas y se obtuvo que el consumo medio anual de electricidad, para la muestra estudiada, fue de 3670 KWh.

a) Calcula el intervalo de confianza para el consumo medio anual de electricidad en dicha población, con un nivel de confianza del 95%. (1 punto)

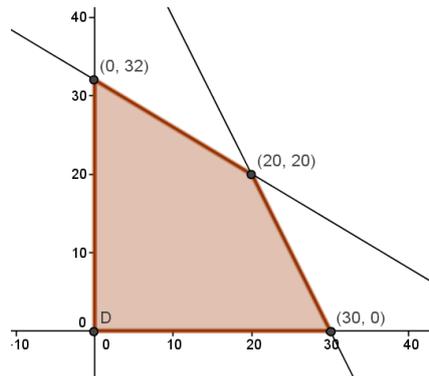
b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza, el aumento o la disminución del nivel de confianza. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

B1.- Solución

Llamaremos x al nº de lotes tipo A, y llamaremos y al nº de lotes de tipo B

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 160 \\ 2x + y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ G(x, y) = 50x + 30y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} -3x - 5y = -160 \\ 10x + 5y = 300 \end{cases} \Rightarrow 7x = 140 \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G(20,20) = 1600 \\ \text{Solución óptima} \end{cases} \\ \begin{cases} 3x + 5y = 160 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 32 \end{cases} \Rightarrow G(0,32) = 50 \cdot 0 + 30 \cdot 32 = 960 \\ \begin{cases} 2x + y = 60 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow G(30,0) = 50 \cdot 30 + 30 \cdot 0 = 1500 \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow G(0,0) = 0 \end{cases}$$



B2.- Solución

Llamaremos A al gasto en euros de agua, L al gasto en euros de luz y T al gasto en euros de teléfono

$$\begin{cases} A + L + T = 180 \\ A + T = L \\ L = 3A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Sustituimos la 3ª en las dos primeras} \\ 4A + T = 180 \\ -2A + T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Restandolas} \\ 6A = 180 \\ A = \frac{180}{6} = 30 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} A = 30 \\ L = 3A = 90 \\ T = L - A = 60 \end{cases}$$

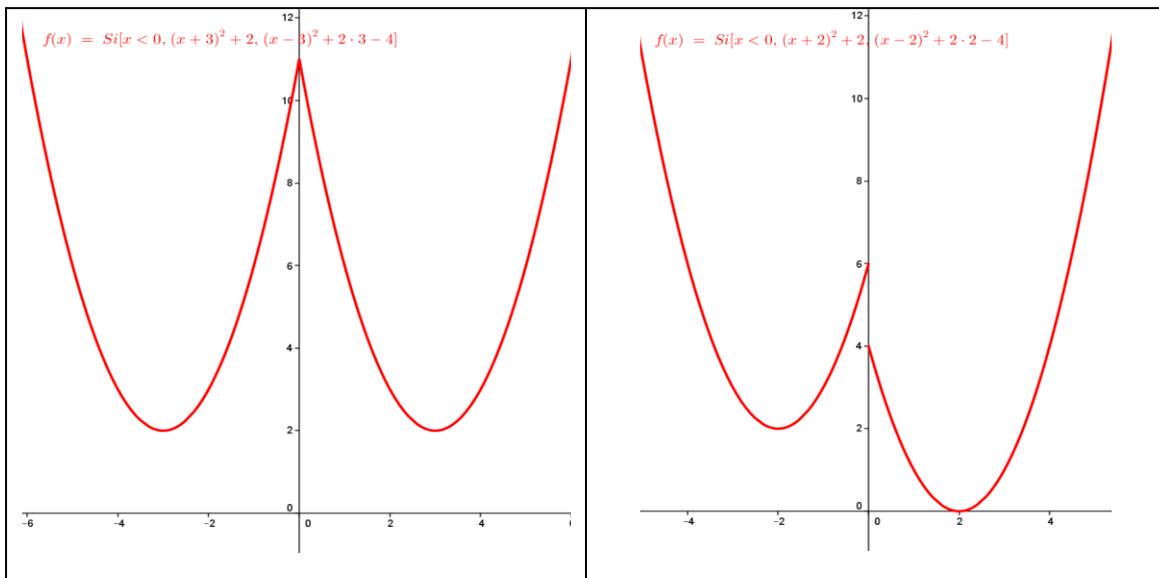
B3.- Solución

$$a) f(x) = \begin{cases} (x+t)^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ (x-t)^2 + 2t - 4 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = t^2 + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+t)^2 + 2 = t^2 + 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-t)^2 + 2t - 4 = t^2 + 2t - 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Para continua en } x = 0 \\ t^2 + 2 = t^2 + 2t - 4 \Rightarrow 2t = 6 \Rightarrow t = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \text{si } t = 2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (x-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 2x - 4 \\ f''(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ para } x = 2 \\ f''(2) = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Mínimo } (2, 0)$$

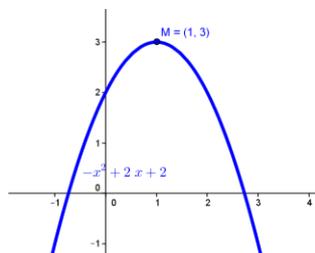
$$c) \begin{cases} \text{si } t = 2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } (0, 2) \text{ y creciente en } (2, +\infty)$$



B4.- Solución

La función debe pasar por el punto (1, 3), la derivada primera debe anularse para x=1 y la derivada segunda debe ser negativa para x=1

$$\begin{cases} f(1) = 3 \Rightarrow a * 1^2 + 2 * 1 + b = 3 \Rightarrow a + b = 1 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 2a * 1 + 2 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -x^2 + 2x + 2 \\ f'(x) = -2x + 2 \\ f''(x) = -2 \end{cases}$$



B5.- Solución

Consideremos los sucesos: A elegir un producto al azar y resulte del modelo A, elegir un producto al azar y resulte del modelo B y C elegir un producto al azar y resulte defectuoso.

$$\text{Sabemos que: } \begin{cases} p(A) = 0,1 \\ p(B) = 0,9 \\ p(D/A) = 0,02 \Rightarrow p(nD/A) = 1 - p(D/A) = 0,98 \\ p(D/B) = 0,01 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p(D) &= p((D \cap A) \cup (D \cap B)) = p(D \cap A) + p(D \cap B) = \\ \text{a) } &= p(D/A) \cdot p(A) + p(D/B) \cdot p(B) = 0,02 * 0,1 + 0,01 * 0,9 = 0,011 \Rightarrow p(nD) = 0,989 \end{aligned}$$

$$\text{b) } p(A/nD) = \frac{p(A \cap nD)}{p(nD)} = \frac{p(A) \cdot p(nD/A)}{p(nD)} = \frac{0,1 * 0,98}{0,989} = 0,099$$

B6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P \left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha$$
, donde $1 - \alpha$ es el nivel de confianza (0,95 en nuestro caso). \bar{x} la media de la muestra, ahora 3670; σ la desviación típica, ahora 650; n el tamaño de la muestra, 100.

$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha/2 = 0,025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$ ya que $(1 - 0,025 = 0,975)$. Ver tabla

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(3670 - 1,96 \frac{650}{\sqrt{100}}, 3670 + 1,96 \frac{650}{\sqrt{100}} \right) = (3542,6, 3797,4)$$

$(3542,6 \text{KWh}, 3797,4 \text{KWh})$

b) Si aumentamos el nivel de confianza entonces α disminuye, $\alpha/2$ disminuye y $z_{\alpha/2}$ aumenta con lo que el radio del intervalo de confianza aumenta y por tanto el intervalo también. Si disminuimos el nivel de confianza ocurre lo contrario el intervalo disminuye.