

Propuesta A

1. a) Despeja la matriz X en la siguiente ecuación matricial: $3 \cdot I - 2 \cdot X + X \cdot A = B$, suponiendo que todas las matrices son cuadradas del mismo orden (I es la matriz identidad). (0.75 pts)

b) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que cumple $A \cdot X = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (0.75 pts)

2. Una empresa tiene delegaciones en Albacete, Cuenca y Toledo. La empresa tiene 24 empleados en total. El número de empleados en la delegación de Albacete es igual a la suma de los empleados en Cuenca y Toledo. Y el número de empleados en Cuenca es el triple del número de empleados en Toledo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita calcular el número de empleados en cada delegación. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad en $x = 0$. (0.5 pts)

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.5 pts)

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 pts)

4. Calcula el valor de los parámetros a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tenga un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 2$. Y tenga un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$. (1.5 puntos)

5. Se piensa que un estudiante de universidad que estudie normal, sobre 15 horas aparte de las clases, tiene una probabilidad de 0.9 de aprobar una materia. Suponiendo que la probabilidad de aprobar cada materia es independiente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe dos materias de dos que ha estudiado normal? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no apruebe ninguna materia de tres que ha estudiado normal? (0.5 puntos)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al menos una materia de dos que ha estudiado normal? (0.5 puntos)

6. En un tramo peligroso de una carretera, se sabe que la velocidad a la que circulan los vehículos sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 15$ Km/h. Se tomó una muestra aleatoria de 400 vehículos que circulaban por dicho punto peligroso, y se comprobó que la velocidad media de los vehículos de dicha muestra era de 110 Km/h.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la velocidad de circulación en el tramo peligroso, con un nivel de confianza del 95%. (1.25 puntos)

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

A1.- Solución

$$3 \cdot I - 2 \cdot X + X \cdot A = B \Rightarrow -2 \cdot X + X \cdot A = B - 3 \cdot I \Rightarrow X \cdot (-2 \cdot I) + X \cdot A = B - 3 \cdot I \Rightarrow \\ X \cdot (-2 \cdot I + A) = B - 3 \cdot I \Rightarrow X = (B - 3 \cdot I) \cdot (A - 2 \cdot I)^{-1}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}; \quad A \cdot X = I \Rightarrow X = A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \text{transpuesta de adjuntos} \end{pmatrix} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

A2.- Solución

Llamaremos A al nº de empleados en la delegación de Albacete, C al nº de empleados en la delegación de Cuenca y T al nº de empleados en la delegación de Toledo

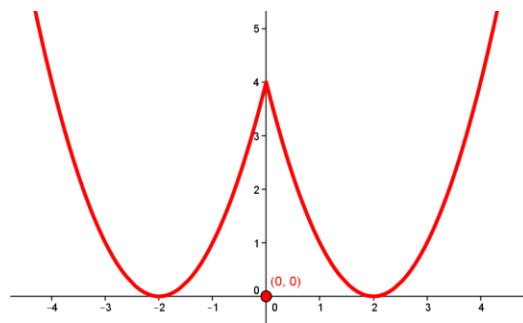
$$\begin{cases} A + C + T = 24 \\ A = C + T \\ C = 3T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Substituyendo la 2ª en la primera} \\ \text{y después la 3ª} \\ C + T + C + T = 24 \\ C = 3T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3T + T + 3T + T = 24 \\ 8T = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 3 \\ C = 9 \\ A = 12 \end{cases}$$

A3.- Solución

$$a) f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2)^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2)^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Para continua en } x = 0 \\ 0 \neq 4 \Rightarrow \text{No es continua} \end{cases}$$

$$b) \text{ si } x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) = (x-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 2x - 4 \\ f''(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ para } x = 2 \\ f''(2) = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Mínimo } (2, 0)$$

$$c) \text{ si } x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x) \text{ es decreciente en } (0, 2) \text{ y creciente en } (2, +\infty)$$

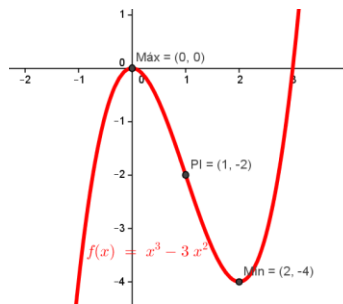


A4.- Solución

Si la derivada primera se anula para $x=2$ y la derivada segunda fuese positiva para $x=2$ la función $f(x)$ tendría un mínimo para $x=2$. Si además la derivada segunda se anula para $x=1$ y la tercera fuese distinta de 0 para $x=1$, entonces la función tendría un punto de inflexión para $x=1$. Por tanto:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + ax^2 + bx \\ f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f''(x) = 6x + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 4 + 2a \cdot 2 + b = 0 \\ f''(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = -12 \\ 2a = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \end{cases}$$

Luego $f(x) = x^3 - 3x^2$ y tiene un mínimo en $(2, -4)$ y un PI en $(1, -2)$



A5.- Solucion

Llamemos AM1 al suceso elegir un estudiante normal al azar y que apruebe la materia1

$$a) p(AM1 \cap AM2) = p(AM1) \cdot p(AM2) = 0,9^2 = 0,81$$

$$b) p(AM1) = 0,9 \Rightarrow p(nAM1) = 0,1 \Rightarrow p(nAM1 \cap nAM2 \cap nAM3) = 0,1^3 = 0,001$$

$$c) p(AM1 \cup AM2) = 1 - p(nAM1 \cap nAM2) = 1 - 0,1^2 = 0,99$$

A6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza (0,95 en}$$

nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, ahora 110; σ la desviación típica, ahora 15; n el tamaño de la muestra, 400.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0,025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96 \text{ ya que } (1 - 0,025 = 0,975). \text{ Ver tabla}$$

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(110 - 1,96 \cdot \frac{15}{\sqrt{400}}, 110 + 1,96 \cdot \frac{15}{\sqrt{400}}\right) = (108,53, 111,47)$$

b) Si aumentamos el nivel de confianza entonces α disminuye, $\alpha/2$ disminuye y $z_{\alpha/2}$ aumenta con lo que el radio del intervalo de confianza aumenta y por tanto el intervalo también. Si disminuimos el nivel de confianza ocurre lo contrario el intervalo disminuye.

Propuesta B

1. Considera el siguiente problema de programación lineal:

Maximiza la función $z = 4x + y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}x - y &\leq 2 \\x + y &\leq 4 \\x &\geq 0 \\y &\geq 0\end{aligned}$$

- a) Dibuja la región factible. (1 punto)
b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 puntos)
c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor. (0.25 puntos)

2. Una ONG solicita un médico, un enfermero y un maestro como voluntarios en un campo de trabajo. En total se presentan 200 voluntarios. Se sabe que el número de maestros que se presentan es igual a la suma del número de médicos más el doble del número de enfermeros voluntarios. Y el número de médicos voluntarios es la quinta parte del número de maestros.

a) Plantea el sistema que permita averiguar el número de médicos, enfermeros y maestros que se presentan como voluntarios. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (-x-5)^2 & \text{si } x \leq -1 \\ t, & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ (x-5)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 1$. (0.5 pts)

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f . (1 pto)

4. La función $f(t) = t^3 - 15t^2 + 48t + 292$, representa la altura, medida en metros, alcanzada por un globo aerostático, durante un trayecto de 10 horas, siendo t el tiempo medido en horas, $0 \leq t \leq 10$.

a) ¿Cuándo alcanza el globo la altura máxima y cuál es este valor? (1 punto)

b) ¿Cuál es la altura mínima a la que baja el globo, y en qué momento (t) se produce? (0.5 puntos)

5. En un municipio el 40 % de los habitantes son aficionados a la lectura, el 50 % al cine, y al 60 % les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.

a) Se elige un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine? (0.75 puntos)

b) Si elegimos un habitante al azar y le gusta el cine, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura? (0.75 puntos)

6. Una empresa, dedicada a la cría de gusanos de la harina como cebo de pesca, sabe que la duración en estado larvario de este insecto se distribuye según una normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 4$ días. Se tomó una muestra aleatoria de 10 huevos y se comprobó que la duración en estado larvario de estos gusanos fue de 50, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 68 y 71 días respectivamente.

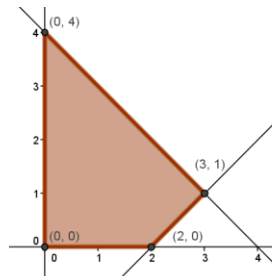
a) Halla el intervalo de confianza para la duración media poblacional en estado larvario de estos insectos, con un nivel de confianza del 95 %. (1.25 puntos)

b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza. (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

B1.- Solución

$$\begin{cases} x - y \leq 2 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z(x, y) = 4x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(3, 1) = 4 \cdot 3 + 1 = 13 \\ \text{Solución óptima} \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow z(0, 4) = 4 \cdot 0 + 4 = 4 \\ \begin{cases} x - y = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z(2, 0) = 4 \cdot 2 + 0 = 8 \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow z(0, 0) = 0 \end{cases}$$



B2.- Solución

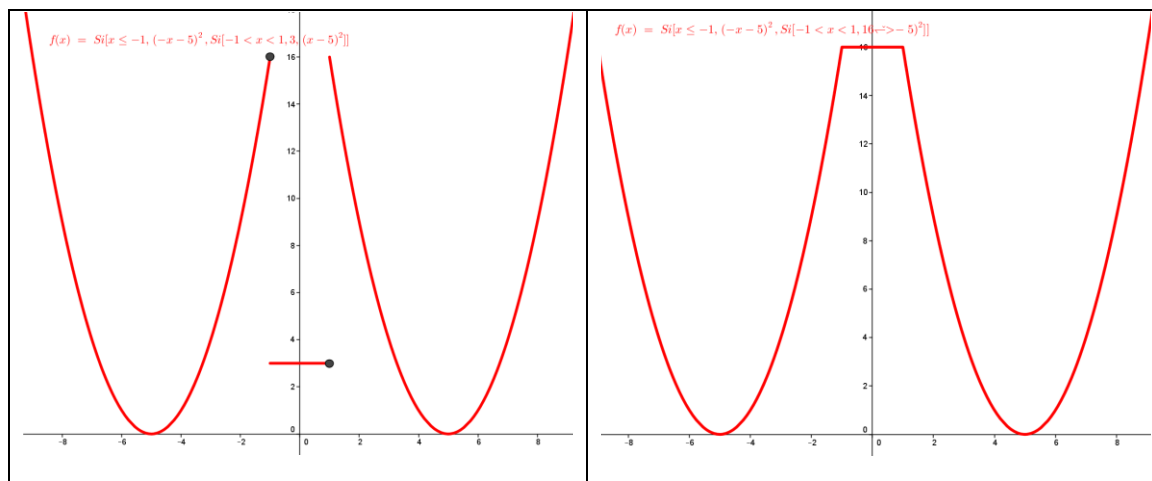
Llamaremos x al nº de médicos que se presentan, y al nº de maestros y z al nº de enfermeros

$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ y = x + 2z \\ x = \frac{y}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 200 \\ y = x + 2z \\ y = 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 5x + z = 200 \\ 5x = x + 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + z = 200 \\ 4x - 2z = 0 \Rightarrow z = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x = 200 \\ x = 25 \\ z = 50 \\ y = 125 \end{cases}$$

B3.- Solución

$$a) f(x) = \begin{cases} (-x-5)^2 & \text{si } x \leq -1 \\ t & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ (x-5)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = t \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} t = t \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-5)^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Para continua en } x = 1 \\ t = 16 \end{cases}$$

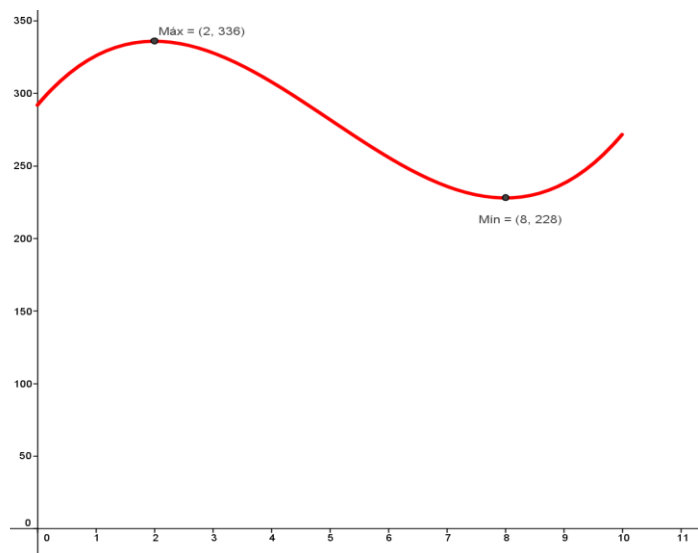
$$b) \text{ si } t = 3 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (-x-5)^2 & \text{si } x \leq -1 \\ 3 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ (x-5)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (x+5)^2 & \text{si } x \leq -1 \\ 3 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ (x-5)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Dos trozos de parábola} \\ \text{y un segmento} \\ \text{a 3 de altura sobre X} \end{cases}$$



B4.- Solución

Emplearemos el teorema que dice: donde se anula la primera derivada y la segunda es negativa hay máximo y donde se anula la primera y la segunda es positiva hay mínimo

$$\begin{cases} f'(t) = 3t^2 - 30t + 48 \\ f''(t) = 6t - 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(t) = 0 \\ 3t^2 - 30t + 48 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(2) = -18 < 0 \\ f''(8) = 18 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2, 336) \text{ Máx} \\ (8, 228) \text{ Mín} \end{cases}$$



B5.- Solución

Llamaremos L al suceso elegir un habitante al azar y le gusta la lectura, C elegir un habitante al azar y le gusta el cine

$$a) p(L \cap C) = p(L) + p(C) - p(L \cup C) = 0,40 + 0,50 - 0,60 = 0,30 = 30\%$$

$$b) p(L/C) = \frac{p(L \cap C)}{p(C)} = \frac{0,30}{0,50} = 0,60 = 60\%$$

B6.- Solución:

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza (0,95 en}$$

nuestro caso). $\bar{x}$ la media de la muestra, calculamos la media de los 10 datos y es 62; σ la desviación típica, ahora 4; n el tamaño de la muestra, 10.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha / 2 = 0,025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96 \text{ ya que } (1 - 0,025 = 0,975). \text{ Ver tabla}$$

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(62 - 1,96 \frac{4}{\sqrt{10}}, 62 + 1,96 \frac{4}{\sqrt{10}}\right) = (59,52, 64,48)$$

b) Si queremos obtener un intervalo de anchura menor manteniendo el nivel de confianza podemos aumentar el tamaño de la muestra; esto hace disminuir el radio del intervalo porque hace aumentar el denominador de la fracción que aparece en él.