

### Propuesta A

1. En una escuela se quiere preparar una excursión para 220 alumnos. La empresa de transportes con la que han hablado tiene 4 autobuses de 40 plazas y 3 de 60 plazas. El alquiler de un autobús grande cuesta 800 euros y el de uno pequeño 600 euros.

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Calcula cuántos autobuses de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela. (0.5 puntos)

2. Una empresa ha vendido por Internet 105 libros electrónicos en un mes. Se dispone de tres modelos A, B y C, cuyos precios son 150 €, 250 € y 400 € respectivamente. La recaudación del mes ha sido de 21500 €. Se sabe que el número de libros electrónicos vendidos del modelo A es el doble de la suma de los de tipo B y C.

a) Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones que permita obtener el número de libros electrónicos vendidos de cada modelo. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

3. Dada la función  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

a) Calcula los valores de las constantes  $a$  y  $b$  sabiendo que la función tiene un máximo relativo en el punto de abscisa  $x = 1$ , y un punto de inflexión en  $x = 2$ . (0.75 puntos)

b) Para los valores de  $a$  y  $b$  obtenidos en el apartado anterior, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f$ . (0.75 puntos)

4. Se considera la función  $f(x) = \begin{cases} |x-2| - t & \text{si } x \leq 2 \\ (x-3)^2 - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  Se pide:

a) Hallar el valor de  $t$  para que  $f$  sea continua en  $x = 2$ . (0.5 puntos)

b) Para  $t = 2$ , representa gráficamente la función  $f$ . (1 punto)

5. El 15 % de los estudiantes matriculados en una determinada asignatura de un centro universitario son fumadores. El 1 % de estos alumnos fumadores obtienen una calificación de sobresaliente en dicha asignatura. Mientras que el 30 % de los alumnos no fumadores obtienen el sobresaliente.

a) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido un sobresaliente en la citada asignatura? (0.75 puntos)

b) Sabiendo que un alumno elegido al azar ha obtenido un sobresaliente, ¿cuál es la probabilidad de que sea fumador? (0.75 puntos)

6. Se ha tomado una muestra aleatoria de los precios, en euros, de un determinado refresco en 10 establecimientos de una ciudad y han resultado ser: 0.60, 0.80, 1.20, 0.95, 0.65, 0.70, 0.75, 0.85, 1 y 0.90. Suponiendo que el precio de este producto se distribuye según una ley normal de desviación típica 0.10 euros, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza del 97 % para el precio medio del refresco en dicha ciudad. (1.25 puntos)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza (0.75 puntos)

| z   | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |

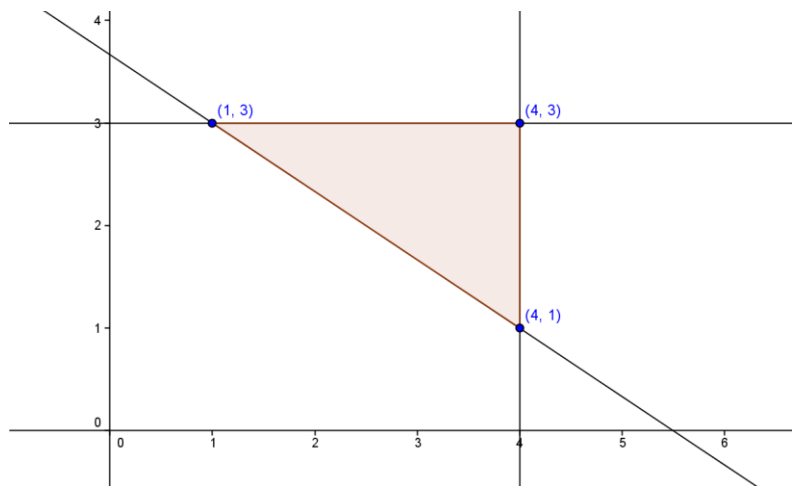
**A1.- Solución:**

Llamaremos  $x=n^{\circ}$  de autobuses de 40 plazas,  $y=n^{\circ}$  autobuses de 60 plazas que utilizaremos

$$\text{Restricciones } \begin{cases} 40x + 60y \geq 220 \\ x \leq 4 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} \begin{cases} 40x + 60y = 220 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 40x + 60y = 220 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Objetivo minimizar } P(x,y) = 600x + 800y \Rightarrow \begin{cases} P(4,1) = 2400 + 800 = 3200 \\ P(1,3) = 600 + 2400 = \mathbf{3000} \\ P(4,3) = 2400 + 2400 = 4800 \end{cases}$$

Luego 1 autobús de 40 plazas y 3 de 60 y 3000€ es la respuesta.

**A2.- Solución:**

Llamaremos  $x=n^{\circ}$  de libros modelo A,  $y=n^{\circ}$  de libros modelo B,  $z=n^{\circ}$  de libros modelo C

$$\begin{cases} x + y + z = 105 \\ 150x + 250y + 400z = 21500 \\ x = 2(y + z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 105 \\ 3x + 5y + 8z = 430 \\ x = 2(y + z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(y + z) + y + z = 105 \\ 6(y + z) + 5y + 8z = 430 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 3z = 105 \\ 11y + 14z = 430 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + z = 35 \\ 11y + 14z = 430 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11y - 11z = -385 \\ 11y + 14z = 430 \end{cases} \Rightarrow 3z = 45 \Rightarrow z = 15 \Rightarrow \begin{cases} z = 15 \\ y = 20 \\ x = 70 \end{cases} \begin{cases} \text{sustituyendo en } y + z = 35 \\ \text{y en } x + y + z = 105 \end{cases}$$

El primer sistema es el planteamiento y la continuación la resolución (70 del modelo A, 20 del B y 15 del C)

**A3.- Solución:**

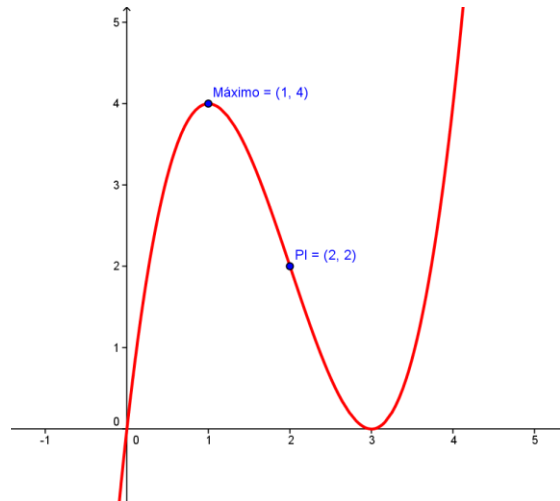
Se trata de una función derivable y las condiciones del enunciado obligan a que la derivada primera se anule en  $x=1$  y la segunda se anule en  $x=2$

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f''(x) = 6x + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 3 + 2a + b \\ f''(2) = 12 + 2a \end{cases} \text{ luego } \begin{cases} 3 + 2a + b = 0 \\ 12 + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = \text{factorizando} = 3(x-1)(x-3) \Rightarrow$$

$$f'(x) > 0 \text{ en } (-\infty, 1), f'(x) < 0 \text{ en } (1, 3), f'(x) > 0 \text{ en } (3, +\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ creciente en } (-\infty, 1), f(x) \text{ decreciente en } (1, 3), f(x) \text{ creciente en } (3, +\infty)$$

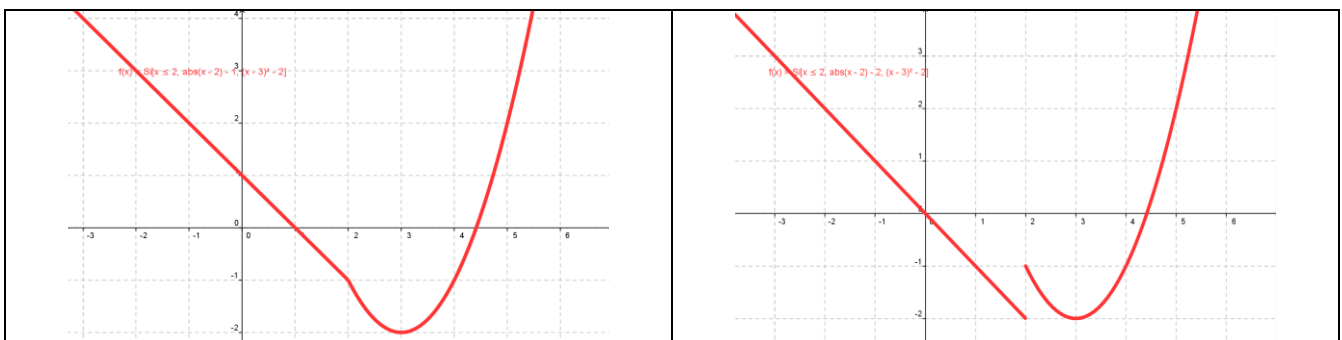
**A4.- Solución:**

a) Para ser continua en  $a$  tiene que estar definida en  $a$ , tener límite y que el límite coincida con el valor  $f(a)$

$$\begin{cases} f(2) = -t \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x-2| - t = -t \Rightarrow t = 1; f(x) = \begin{cases} |x-2| - 1 & \text{en } (-\infty, 2] \\ (x-3)^2 - 2 & \text{en } (2, +\infty) \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-3)^2 - 2 = -1 \end{cases}$$

El primer trozo es la recta  $|x-2|-1 = -x+1$  en  $(-\infty, 2]$ . El segundo es la parábola  $x^2$  desplazada 3 a la izquierda y 2 hacia abajo en  $(2, +\infty)$

b) El primer trozo es la recta  $|x-2|-2 = -x$  en  $(-\infty, 2]$ . El segundo es la parábola  $x^2$  desplazada 3 a la izquierda y 2 hacia abajo en  $(2, +\infty)$



**A5.- Solución:**

$$a) P(Sob) = P((F \cap Sob) \cup (NF \cap Sob)) = P(F \cap Sob) + P(NF \cap Sob) = \\ = P(F) \cdot P(Sob/F) + P(NF) \cdot P(Sob/NF) = 15\% \cdot 1\% + 85\% \cdot 30\% = 25'65\%$$

$$b) P(F/Sob) = \frac{P(F \cap Sob)}{P(Sob)} = \frac{15\% \cdot 1\%}{25'65\%} = 0'585\%$$

**A6.- Solución:**

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza (0,97 en nuestro caso). } \bar{x} \text{ la}$$

media de la muestra, ahora 0,84€(sumamos y dividimos por 10);  $\sigma$  la desviación típica, ahora 0,10€;  $n$  el tamaño de la muestra, 10.

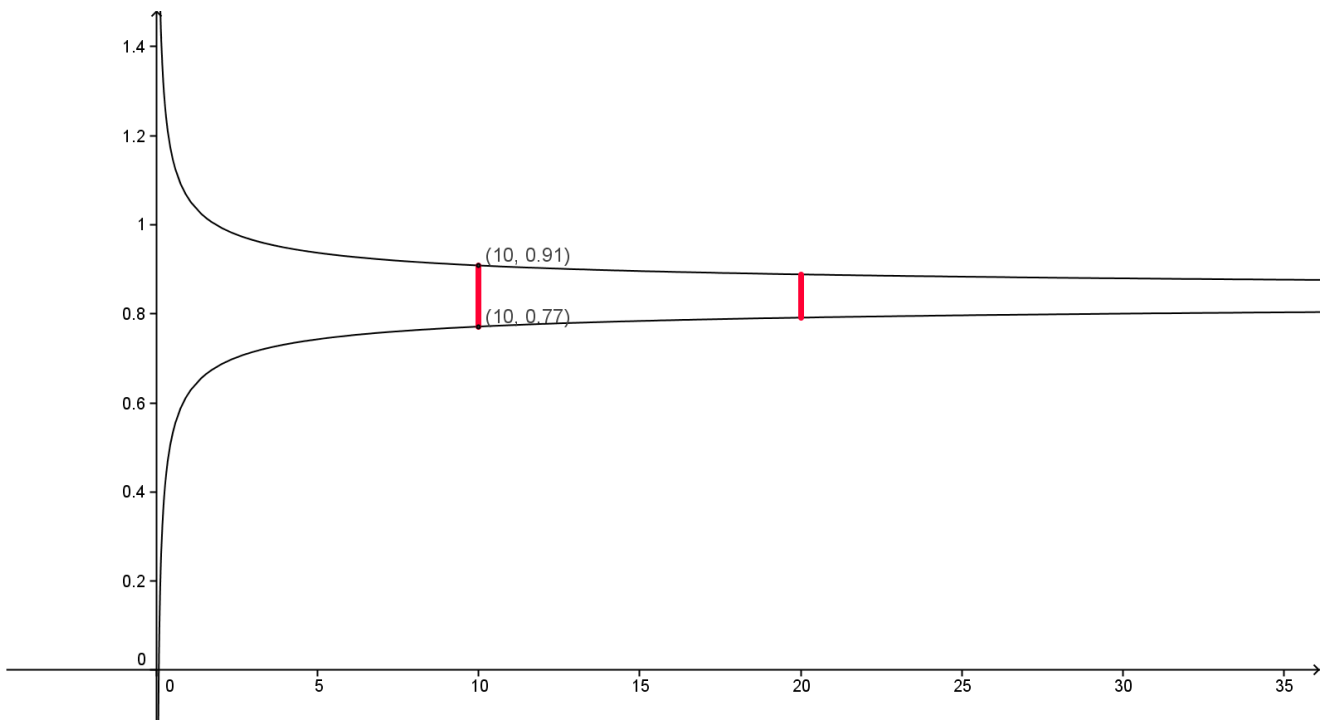
$$1 - \alpha = 0,97 \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \alpha/2 = 0,015 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2,17 \text{ ya que } (1 - 0,015 = 0,985). \text{ Ver tabla}$$

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(0,84 - 2,17 \frac{0,1}{\sqrt{10}}, 0,84 + 2,17 \frac{0,1}{\sqrt{10}}\right) = (0'77, 0'91)$$

b) Observamos que  $n$ , el tamaño de la muestra, aparece en el denominador, luego cuanto más grande sea menor será el radio del intervalo y por tanto menor el intervalo. Luego, aumentaríamos el tamaño de la muestra. Para que el intervalo se reduzca a la mitad debemos cuadruplicar el tamaño de la muestra.

La distancia vertical entre las dos gráficas es la amplitud del intervalo para cada  $n$



### Propuesta B

1. Dadas las matrices:  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Se pide:

a) Calcular la matriz  $M = (2 \cdot I + A \cdot B)$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)

b) Calcular la matriz  $X$  tal que  $X \cdot C = I$ , donde  $I$  es la matriz identidad de orden 2. (0.75 puntos)

2. Un museo tiene tres salas de exposiciones:  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Los precios de las entradas son 2, 5 y 8 euros respectivamente. En un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 1020 euros. Se sabe que vendieron un total de 300 entradas. El número de entradas vendidas de la exposición  $A$  fue el doble de las que vendieron conjuntamente en  $B$  y  $C$ .

a) Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones que permita obtener el número de visitantes que tuvo cada exposición. (1.5 puntos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

3. El índice de audiencia de un programa de televisión de 3.5 horas de duración se estudia mediante la función:  $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 10$ ,  $0 \leq t \leq 3.5$ . Siendo  $t$  el tiempo transcurrido en horas desde que comienza el programa y  $f(t)$  el porcentaje (%) de personas que ven el programa en el momento  $t$ .

a) ¿Cuál es el porcentaje de personas que ven el programa transcurridas 3 horas ( $t = 3$ ) desde el comienzo del programa? (0.25 puntos)

b) Calcula el momento de máxima audiencia y el porcentaje de personas que ven el programa en ese momento. (1.25 puntos)

4. Se considera la función  $f(x) = \begin{cases} |x^3 - 2| & \text{si } x \leq 2 \\ (x - 3)^2 - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  Se pide:

a) Estudia su continuidad en  $x = 2$ . (0.5 puntos)

b) Extremos relativos en el intervalo  $(2, 4)$ . (0.5 puntos)

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento en  $(2, \infty)$ . (0.5 puntos)

5. En una biblioteca del campus de la UCLM hay 100 personas de Albacete, 50 de Ciudad Real, 100 de Toledo y 50 de Cuenca.

a) Se sortean dos ordenadores entre todas ellas, ¿cuál es la probabilidad de que no le toque a ningún toledano? (pueden tocarle a la misma persona los dos ordenadores). (0.75 puntos)

b) Se eligen al azar tres personas entre todas ellas para un concurso, de una en una y sin que se puedan repetir, ¿cuál es la probabilidad de que las tres sean ciudadrealeñas? (0.75 puntos)

6. En una ciudad el consumo de agua por persona y día sigue una distribución normal de desviación típica 20 litros. Se eligieron al azar 50 personas, cuyo gasto medio de agua al día fue de 185 litros.

a) Halla el intervalo de confianza al 95 % para el consumo medio diario de agua por persona y día en esa ciudad. (1 punto)

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (1 punto)

| z   | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |

**B1.- Solución:**

$$a) 2 \cdot I + A \cdot B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b) X \cdot C = I \Rightarrow X = C^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{Hemos multiplicado el inverso} \\ \text{del determinante de C} \\ \text{por la transpuesta de adjuntos} \end{array} \right.$$

**B2.- Solución:**

Llamaremos  $x = n^\circ$  de entradas para la sala A,  $y = n^\circ$  de entradas para la sala B,  $z = n^\circ$  de entradas para la sala C

$$\begin{cases} 2x + 5y + 8z = 1020 \\ x + y + z = 300 \\ x = 2(y + z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(y + z) + 5y + 8z = 1020 \\ 2(y + z) + y + z = 300 \\ x = 2(y + z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y + 12z = 1020 \\ 3y + 3z = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y + 12z = 1020 \\ -9y - 9z = -900 \end{cases} \Rightarrow z = 40$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y + 40 = 100 \Rightarrow y = 60 \\ x = 2(60 + 40) = 200 \end{cases} \Rightarrow 200 \text{ entradas en la sala A, } 60 \text{ en la B y } 40 \text{ en la C}$$

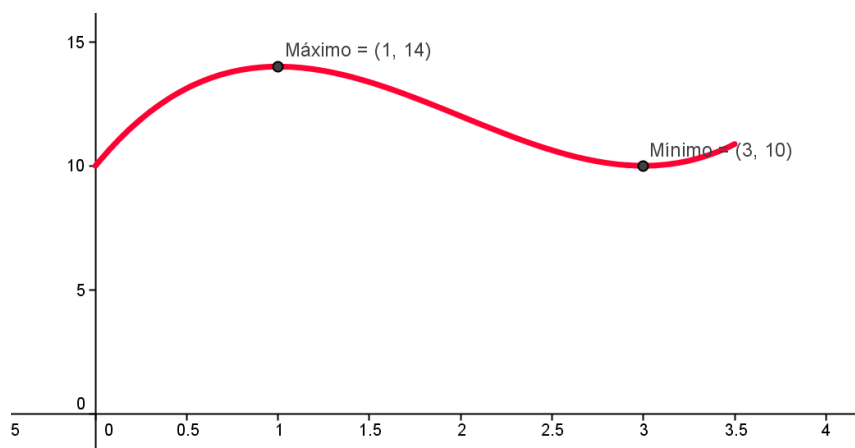
**B3.- Solución:**

$$a) f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 10 \Rightarrow f(3) = 27 - 54 + 27 + 10 = 10\%$$

$$b) f'(t) = 3t^2 - 12t + 9 \Rightarrow f''(t) = 6t - 12$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow \text{Máximo en } (1, 14) = \text{transcurrida 1 hora el } 14\%$$



**B4.- Solución:**

a) Para ser continua en  $a$  tiene que estar definida en  $a$ , tener límite y que el límite coincida con el valor  $f(a)$

$$\begin{cases} f(2) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x^3 - 2| = 6 \Rightarrow 6 \neq 1; f(x) \text{ no es continua en } x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-3)^2 - 2 = -1 \end{cases}$$

b) El segundo trozo de  $f(x)$  es la parábola  $x^2$  desplazada 3 a la izquierda y 2 hacia abajo en  $(2, +\infty)$

b) luego hay un mínimo en  $(3, -2)$  que es el vértice de la parábola

c) es decreciente en  $(2, 3)$  y creciente en  $(3, +\infty)$  ya he dicho que es una parábola.

**B5.- Solución:**

$$a) P(O1 \text{ no toque a un toledano}) = \frac{200}{300}, P(O2 \text{ no toque a un toledano}) = \frac{200}{300}$$

$$P(O1 \text{ no toque} \cap O2 \text{ no toque}) = \frac{200}{300} \cdot \frac{200}{300} = \frac{4}{9} \text{ y pueden tocar los dos a la misma persona.}$$

$$b) P(\text{la persona 1 sea de CR} \cap \text{la p2 sea de CR} \cap \text{la p3 sea de CR}) = \frac{50}{300} \cdot \frac{49}{299} \cdot \frac{48}{298} = \frac{196}{44551}$$

**B6.- Solución:**

Para obtener el intervalo de confianza debemos tener en cuenta que:

$$P\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha, \text{ donde } 1 - \alpha \text{ es el nivel de confianza (0,95 en nuestro caso). } \bar{x} \text{ la}$$

media de la muestra, ahora 185 litros;  $\sigma$  la desviación típica, ahora 20 litros;  $n$  el tamaño de la muestra, 50.

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \alpha/2 = 0,025 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96 \text{ ya que } (1 - 0,025 = 0,975). \text{ Ver tabla}$$

a) Luego el intervalo pedido es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(185 - 1,96 \frac{20}{\sqrt{50}}, 185 + 1,96 \frac{20}{\sqrt{50}}\right) = (179,46, 190,54)$$

b) Observamos que  $n$ , el tamaño de la muestra, aparece en el denominador, luego cuanto más grande sea menor será el radio del intervalo y por tanto menor el intervalo. Luego, aumentaríamos el tamaño de la muestra. Para que el intervalo se reduzca a la mitad debemos cuadruplicar el tamaño de la muestra.