Propuesta A

1A.- a) Definición de derivada en un punto **(0'5 puntos)**

b) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax+sen\ x}{2x-x^2} & si \quad x<0 \\ bx+c & si \quad 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{1+x} & si \quad x\ge 1 \end{cases}$, determina los parámetros $a,b,c\in\Re$ para que **f(x)** sea una función continua en **x = 0**, y además sea continua y derivable en **x = 1 (2 puntos)**

a) La derivada de la función **f** en el punto **x = a, f'(a**), si existe, es el valor del límite**:**

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{k}$$

b)
Para ser derivable hay que estudiar, inicialmente, que sea continua

$$\begin{cases} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\dfrac{a\cdot 0+sen\ 0}{2\cdot 0-0^2}=\dfrac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a+cos\ x}{2-2x}=\dfrac{a+cos\ 0}{2-2\cdot 0}=\dfrac{a+1}{2-0}=\dfrac{a+1}{2} \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=b\cdot 0+c=c \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a+1}{2}=c \\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=b\cdot 1+c=b+c \\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow b+c=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} b \quad si \quad 0<x<1 \\ -\dfrac{1}{(1+x)^2} \quad si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\dfrac{1}{(1+1)^2}=-\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow b=-\dfrac{1}{4}$$

$$\begin{cases} a+1=2c \\ -\dfrac{1}{4}+c=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow c=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow a+1=2\cdot\frac{3}{4} \Rightarrow a=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2} \Rightarrow Solución \Rightarrow (a\ ,b\ ,c)=\left(\frac{1}{2}\ ,-\frac{1}{4}\ ,\frac{3}{4}\right)$$

2A.- a) Determina el dominio de la función $f(x)=\sqrt{2x+1}$ **(1 punto)**

b) Calcula la integral definida: $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx$ **(1'5 puntos)**

$a)$

$$2x+1\ge 0 \Rightarrow 2x\ge -1 \Rightarrow x\ge -\frac{1}{2} \Rightarrow dom\,(f)=\forall x\in\Re\ /\ x\ge -\frac{1}{2}$$

$b)$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{2x+1}\ dx=\int_0^1 t\cdot t\ dt\ =\int_0^1 t^2\ dt=\frac{1}{3}\cdot\left[t^3\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right)=\frac{1}{3}$$

$$2x+1=t^2 \Rightarrow 2\ dx=2t\ dt \Rightarrow dx=t\ dt \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=\sqrt{2\cdot 0+1}=1 \\ x=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow t=\sqrt{2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1}=\sqrt{-1+1}=0 \end{cases}$$

3A.- Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $y\ F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) ¿ Para que valores de $\lambda \in \Re$ existe la matriz inversa de **M**? **(1 punto)**
b) Para $\lambda = 0$ resuelve, si es posible, la ecuación **XM = 2F**, donde **X** es una matriz cuadrada de orden **3** **(1'5 puntos)**

a) Existe la inversa de una matriz siempre que su determinante no sea nulo

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -9\lambda + 2\lambda^2 - 4 + 6 - \lambda^2 + 12\lambda = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \Rightarrow Si\ |M| = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \geq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{-3+1}{2} = -1 \\ \lambda = \dfrac{-3-1}{2} = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall \lambda \in \Re - \{-2\ ,-1\} \Rightarrow |M| \neq 0 \Rightarrow Existe\ M^{-1}$$

$b)$

$$XMM^{-1} = 2FM^{-1} \Rightarrow XI = 2FM^{-1} \Rightarrow X = 2FM^{-1}$$

$$Si\ \lambda = 0 \Rightarrow |M| 0^2 + 3 \cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \left(adj\ M^t\right) \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow M^t = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\ M^t = \begin{pmatrix} -9 & -1 & 3 \\ 12 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -9 & -1 & 3 \\ 12 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = 2FM^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -9 & -1 & 3 \\ 12 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & -1 & 3 \\ 12 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & -4 \\ -9 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4A.- Dado el punto **P(0 , 0 , 1)** y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=0 \end{cases}$

a) Calcular la distancia del punto **P** a la recta **r**. **(1'25 puntos)**
b) Hallar unas ecuaciones paramétricas de la recta **s** que pase por **P** y corte perpendicularmente a la recta **r (1'25 puntos)**

a) Hallaremos un plano π que contenga el punto **P** y sea perpendicular a la recta **r** cuyo vector director es el del plano que es perpendicular al vector formado por el punto **P** y el punto **G**, generador del plano, y por ello su producto escalar es nulo y la ecuación del plano a hallar.
Una vez obtenido el plano calcularemos el punto **Q** de corte entre plano π y recta **r.** La distancia de **P** a **Q** es la distancia del punto a la recta r que se pide

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y=0 \end{cases} x=y \Rightarrow 2y+z=3 \Rightarrow z=3-2y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=3-2\lambda \end{cases} ,\lambda \in \Re \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(1\,,1\,,-2)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_r}=(1\,,1\,,-2) \\ \overrightarrow{PG}=(x\,,y\,,z)-(0\,,0\,,1)=(x\,,y\,,z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{PG}=0 \Rightarrow (1\,,1\,,-2)\cdot(x\,,y\,,z-1)=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x+y-2z+2=0$$

Punto Q de corte de la recta y el plano

$$\begin{cases} x+y-2z+2=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=3-2\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \lambda+\lambda-2(3-2\lambda)+2=0 \Rightarrow 2\lambda-6+4\lambda+2=0 \Rightarrow 6\lambda-4=0 \Rightarrow 6\lambda=4 \Rightarrow \lambda=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$Q\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{2}{3} \\ z=3-2\cdot\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{2}{3}\,,\frac{2}{3}\,,\frac{5}{3}\right) \Rightarrow d(P\,,r)=d(P\,,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{5}{3}-1\right)^2}=$$

$$d(P\,,r)=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{3\cdot\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{\sqrt{12}}{3}\,u$$

b) El vector director de la recta **s** y el formado por **P** y el punto de corte **Q** que hemos calculado.

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{2}{3}\,,\frac{2}{3}\,,\frac{5}{3}\right)-(0\,,0\,,1)=\left(\frac{2}{3}\,,\frac{2}{3}\,,\frac{2}{3}\right)\equiv(1\,,1\,,1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=\mu \\ z=1+\mu \end{cases}$$

Propuesta B

1B.- Dada la función definida por $f(x)=\begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -1 & 0 & x-6 \end{vmatrix}$, se pide:

a) Halla su expresión polinómica simplificada calculando el determinante **(0'5 puntos)**
b) Calcula las coordenadas de su punto de inflexión y los intervalos en donde sea cóncava hacia arriba $(\cup)$ y cóncava hacia abajo $(\cap)$ **(2 puntos)**

$a)$

$$f(x)=\begin{vmatrix} 3x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ -1 & 0 & x-6 \end{vmatrix}=3x\cdot x\cdot(x-6)-1=3x^3-18x^2-1$$

$b)$

$$f'(x)=9x^2-36x\Rightarrow f''(x)=18x-36=18(x-2)\Rightarrow f''(x)=0\Rightarrow 18(x-2)=0\Rightarrow x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow$$

$$f'''(x)=18\neq 0\Rightarrow Punto\ de\ inf\ lexión\Rightarrow x=2\Rightarrow f(2)=3\cdot 2^3-18\cdot 2^2-1=24-72-1=-49$$

$$Si\ f''(x)>0\Rightarrow 18(x-2)>0\Rightarrow\begin{cases} 18>0 \\ x-2>0\Rightarrow x>2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} Cóncavo\ \forall x\in\Re\ /\ x>2 \\ Convexo\ \forall x\in\Re\ /\ x<2 \end{cases}$$

Tal como determina el enunciado parece que le interesa mas saber los máximos y mínimos y la relacion que tienen con el punto de inflexión a partir de **x > 2**

$$f'(x)=9x^2-36x=9x(x-4)\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 9x(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0\Rightarrow f''(0)=18\cdot 0-36=-36<0\Rightarrow Máximo \\ x=4\Rightarrow f''(4)=18\cdot 4-36=36>0\Rightarrow Mínimo \end{cases}$$

$$Cóncava\ hacia\ abajo\Rightarrow\forall x\in\Re\ /\ 2<x<4 \qquad Cóncava\ hacia\ arriba\Rightarrow\forall x\in\Re\ /\ x>4$$

2.B.- a) Enuncia la fórmula de la integración por partes **(0'5 puntos)**
b) Calcula la integral indefinida: $\int x\ Ln\ x\ dx$ (Nota: **Ln x** representa el logaritmo neperiano de **x**)
(2 puntos)

$a)$

$$\int u\ dv=uv-\int v\ du$$

$b)$

$$\int Ln\ x\ dx=x\ Ln\ x-\int x\frac{dx}{x}=x\ Ln\ x-\int dx=x\ Ln\ x-x+K=x(Ln\ x-1)+K$$

$$\begin{cases} u=Ln\ x\Rightarrow\dfrac{dx}{x}=du \\ dx=dv\Rightarrow v=\int dx=x \end{cases}$$

3B.- a) Clasifica, en función del parámetro $\lambda \in \Re$, el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + y + \lambda z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + z = 10 \end{cases}$

(1'5 puntos)

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 3$ **(1 punto)**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \lambda \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 1 + 3\lambda + 2\lambda - 6 - 1 = 5\lambda - 10 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 5\lambda - 10 = 0 \Rightarrow 5\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{10}{5} = 2$$

$$\forall m \in \Re - \{2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$Si\ \lambda = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & -2 & -20 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -20 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = -4$$

$$z = -\frac{4}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$b)$

$Si\ \lambda = 3 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & -2 & -20 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -20 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -20 \end{array}\right) \Rightarrow 2z = -20 \Rightarrow$$

$$z = -\frac{20}{2} = -10 \Rightarrow 5y + (-10) = 0 \Rightarrow 5y - 10 = 0 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow 2x + 2 + 3 \cdot (-10) = 0 \Rightarrow$$

$$2x + 2 - 30 = 0 \Rightarrow 2x - 28 = 0 \Rightarrow 2x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{2} = 14 \Rightarrow Solución \Rightarrow (x\ ,\ y\ ,\ z) = (14\ ,2\ ,-10)$$

4.B.- Consideremos los planos $\pi \equiv ax + by + 3z = c$, $\pi' \equiv 2x - y + z = 3$, y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ y + 2z = -4 \end{cases}$

a) Determina los parámetros $a,b,c \in \Re$ para que los planos π y π' sean paralelos **(1 punto)**

b) Para los valores **a** y **b** obtenidos, estudia la posición relativa del plano π y la recta **r** en función de $c \in \Re$ **(1'5 puntos)**

a) Los vectores directores de los planos son iguales o proporcionales. Veremos, después, el valor de c que

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (a\ ,b\ ,3) \\ \overrightarrow{v_{\pi'}} = (2\ ,-1\ ,1) \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{-1} = \frac{3}{1} \neq \frac{c}{3} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 1 = 3 \cdot 2 \Rightarrow a = 6 \\ b \cdot 1 = 3 \cdot (-1) \Rightarrow b = -3 \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv 6x - 3y + 3z = c \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 9$$

$$\forall c \in \Re - \{9\}$$

Continuación del Problema 4B

b) Veremos, inicialmente, si los vectores directores son perpendiculares calculando su producto escalar y si este es nulo son paralelos o coincidentes, en este ultimo caso un punto cualquiera de la recta (tomamos el indicado en su ecuación) pertenece al plano, de no ser asi es paralelo.
Si el producto escalar es no nulo la recta y el plano se cortan

$$y=-4-2z \Rightarrow 2x=-3z \Rightarrow x=-\frac{3}{2}z \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\left(-\frac{3}{2},-2,1\right)\equiv(3,4,-2) \Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=3\lambda \\ y=-4+4\lambda \\ z=-2\lambda \end{cases} \Rightarrow R(0,-4,0)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(3,4,-2) \\ \overrightarrow{v_\pi}=(6,-3,3)\equiv(2,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_\pi}=(3,4,-2)\cdot(2,-1,1)=6-4-2=0 \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{v_\pi}$$

La recta y el plano son paralelos o la recta esta contenida en el plano

Cuando esta contenida R pertenece al plano $\Rightarrow \pi\equiv 6\cdot 0-3\cdot(-4)+3\cdot 0=c \Rightarrow c=12$

$\forall c\in\Re-\{12\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow$ *R no pertenece al plano* $\pi \Rightarrow$ *La recta r y el plano* π *son paralelos*

Cuando $c=12 \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{v_\pi} \Rightarrow$ *R pertenece al plano* $\pi \Rightarrow$ *La recta r está contenida en el plano* π