

PRIMER BLOQUE

A. Enuncia el teorema del valor medio de Lagrange. Explica su interpretación geométrica.

Determina los valores de $k, p \in \mathbb{R}$ para que la función
$$\begin{cases} \frac{k+x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + p & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
 verifique la hipótesis de dicho teorema en el intervalo $[-1, 3]$

Teorema del valor medio o de Lagrange

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Geométricamente, como $f'(c)$ la pendiente de la recta tangente en el punto c y $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

es la pendiente de la cuerda que une los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$, el teorema dice que dichas rectas tienen la misma pendiente; luego si una función es continua en $[a, b]$ y tiene tangente en todos los puntos de (a, b) , es decir, es derivable en (a, b) , entonces existe, al menos, un punto de (a, b) en el cual la recta tangente es paralela a la cuerda limitada por los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$

La primera condición es que la función sea **continua**, puede haber problemas en $x = 0$

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{k+0}{0-1} = -k \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^0 + p = 1 + p \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow -k = 1 + p \Rightarrow p + k = -1$$

Veamos si es derivable, puede haber problemas en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1+k}{(x-1)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ e^x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\frac{1+k}{(0-1)^2} = -1-k \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \Rightarrow -1-k = 1 \Rightarrow$$

$$-k = 2 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow p - 2 = -1 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2+x}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

B. Determinar los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x) = a \operatorname{sen}(x) + b \cos(x)$ pase por el punto $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y además cumpla que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa

$x = \frac{\pi}{2}$ sea 5. Calcula la derivada de orden 2008 de dicha función

$$f'(x) = a \cos(x) - b \operatorname{sen}(x) \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow a \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + b \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b = \sqrt{2} \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \Rightarrow a \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - b \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \Rightarrow 0 \cdot a - 1 \cdot b = 5 \Rightarrow -b = 5 \end{cases}$$

$$b = -5 \Rightarrow \frac{a+b}{2} = 1 \Rightarrow a+b = 2 \Rightarrow a-5 = 2 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow f(x) = 7 \operatorname{sen}(x) - 5 \cos(x)$$

Continuación del Problema B del Primer Bloque

$$f(x) = 7 \operatorname{sen}(x) - 5 \cos(x) \Rightarrow f'(x) = 7 \cos(x) + 5 \operatorname{sen}(x) \Rightarrow f''(x) = -7 \operatorname{sen}(x) + 5 \cos(x)$$

$$f'''(x) = -7 \cos(x) - 5 \operatorname{sen}(x) \Rightarrow f^{IV}(x) = 7 \operatorname{sen}(x) - 5 \cos(x) \Rightarrow$$

$$2008 \quad \underline{4}$$

$$008 \quad 502$$

$$0 \quad f^{MMVIII}(x) = f^{IV}(x) = 7 \operatorname{sen}(x) - 5 \cos(x)$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Enuncia la regla de Barrow. Calcula la integral definida $\int_0^1 (x^2 + x) e^x dx$

Regla de Barrow

Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$, y sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$; entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^1 (x^2 + x) e^x dx = [(x^2 + x) e^x]_0^1 - \int_0^1 (2x + 1) e^x dx = (1^2 + 1) e^1 - (0^2 + 0) e^0 - \left\{ [(2x + 1) e^x]_0^1 - \int_0^1 2 e^x dx \right\}$$

$$\begin{cases} x^2 + x = u \Rightarrow du = (2x + 1) dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 1 = u \Rightarrow du = 2 dx \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

$$\int_0^1 (x^2 + x) e^x dx = 2e - 0 \cdot 1 - [(2 \cdot 1 + 1) e^1 - (2 \cdot 0^2 + 1) e^0] + \int_0^1 2 e^x dx = 2e - 3e + 1 + 2 \cdot [e^x]_0^1 =$$

$$\int_0^1 (x^2 + x) e^x dx = -e + 1 + 2 \cdot (e^1 - e^0) = -e + 1 + 2(e - 1) = -e + 1 + 2e - 2 = e - 1$$

B. Calcula la integral $\int \frac{e^{2x} + e^x}{1 + e^{2x}} dx$. Indicación: Puede ayudarte hacer un cambio de variable adecuado.

$$I = \int \frac{e^x + 1}{1 + e^{2x}} e^x dx = \int \frac{t + 1}{1 + t^2} dt = \int \frac{t}{1 + t^2} dt + \int \frac{1}{1 + t^2} dt = \int \frac{1}{u} \frac{du}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} t = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x$$

$$e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \quad 1 + t^2 = u \Rightarrow 2t dt = du \Rightarrow t dt = \frac{du}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} \ln u + \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x = \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x = \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x + K = \ln \sqrt{1 + e^{2x}} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^x + K$$

TERCER BLOQUE

A. Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Estudia, en función del parámetro λ , el rango de **A · B**

b) razona que la matriz **B · A** tiene inversa para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, y calcula dicha matriz inversa

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{rang}(A \cdot B) = 2$$

b) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -\lambda \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |B \cdot A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -\lambda \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3\lambda - 3 + 3\lambda = -3 \neq 0$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow |B \cdot A| = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (B \cdot A)^{-1} \Rightarrow (B \cdot A)^{-1} = \frac{1}{|B \cdot A|} \cdot [\text{adj}(B \cdot A)^t] \Rightarrow (B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 3 \\ -\lambda & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj}(B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} -3 & \lambda \\ -3 & \lambda+1 \end{pmatrix} \Rightarrow (B \cdot A)^{-1} = \frac{1}{(-3)} \cdot \begin{pmatrix} -3 & \lambda \\ -3 & \lambda+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda}{3} \\ 1 & -\frac{\lambda+1}{3} \end{pmatrix}$$

B.- Considérese el sistema de ecuaciones lineales **A · X = B** donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2a & a & -1 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

siendo **a** un parámetro real. Se pide:

a) Clasifica el sistema en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

b) Para $a = 0$ obtén las soluciones mediante el cálculo **X = A⁻¹ · B**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2a & a & -1 \\ 1 & -a & 1 \end{vmatrix} = a + 1 - 4a^2 - 2a - a + 2a = -4a^2 + 1 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -4a^2 + 1 = 0 \Rightarrow 4a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall a \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

Continuación del Problema B del Tercer Bloque

a) Continuación

$$\text{Si } a = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 10 \Rightarrow z = \frac{10}{0} \Rightarrow \text{Sin solución}$$

Sistema Incompatible

$$\text{Si } a = \frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -12 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array} \right)$$

$$0z = -10 \Rightarrow z = -\frac{10}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

CUARTO BLOQUE

A. Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + \sqrt{k}z = 3$ con k un número real positivo $\pi_2 \equiv 3x + 4y = -5$

a) ¿Es posible hallar k para que π_1 y π_2 formen un ángulo de 60° ? En caso afirmativo, calcúlalo

b) ¿Es posible hallar k para que π_1 y π_2 sean perpendiculares? En caso afirmativo, calcúlalo

a)

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi_1} = (2, 1, \sqrt{k}) \\ \vec{v}_{\pi_2} = (3, 4, 0) \end{cases} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{|\vec{v}_{\pi_1} \cdot \vec{v}_{\pi_2}|}{|\vec{v}_{\pi_1}| |\vec{v}_{\pi_2}|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|(2, 1, \sqrt{k}) \cdot (3, 4, 0)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (\sqrt{k})^2} \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|6 + 4|}{\sqrt{5+k} \sqrt{25}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{10}{5\sqrt{5+k}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5+k}} \Rightarrow \sqrt{5+k} = 4 \Rightarrow 5+k = 16 \Rightarrow k = 11$$

b) Si los planos son perpendiculares sus vectores directores son perpendiculares y su producto escalar nulo

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi_1} = (2, 1, \sqrt{k}) \\ \vec{v}_{\pi_2} = (3, 4, 0) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{\pi_1} \cdot \vec{v}_{\pi_2} = (2, 1, \sqrt{k}) \cdot (3, 4, 0) = 6 + 4 + 0 = 10 \neq 0 \Rightarrow$$

No son perpendiculares ni los vectores directores ni los planos sea cual sea k

B. Considera los puntos **A**(1, 2, 1), **B**(3, 6, 3), **C**(0, -1, 5) y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = -1 \\ z - y = 4 \end{cases}$

a) Halla el punto **D** de la recta **r** de forma que los puntos **A**, **B**, **C** y **D** estén en un mismo plano

b) Determina un punto **D'** de la recta **r** para que el volumen del tetraedro determinado por los vértices **A**, **B**, **C** y **D'** sea $\frac{10}{3}$

a) Los vectores **AB**, **AC** y **AD**, son coplanarios, uno de ellos es combinación lineal de los otros dos y el determinante de la matriz que forman es nulo

$$\begin{cases} x = -1 + y \\ z = 4 + y \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, 6, 3) - (1, 2, 1) = (2, 4, 2) \equiv (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -1, 5) - (1, 2, 1) = (-1, -3, 4) \\ \overrightarrow{AD'} = (-1 + \lambda, \lambda, 4 + \lambda) - (1, 2, 1) = (\lambda - 2, \lambda - 2, \lambda + 3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} \lambda - 2 & \lambda - 2 & \lambda + 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$16(\lambda - 2) - 2(\lambda - 2) - 6(\lambda + 3) + 4(\lambda + 3) + 6(\lambda - 2) - 8(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow 12(\lambda - 2) - 2(\lambda + 3) = 12\lambda - 24 - 2\lambda - 6$$

$$10\lambda - 30 = 0 \Rightarrow 10\lambda = 30 \Rightarrow \lambda = 3$$

$$5\lambda = 15 \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow D' \begin{cases} x = -1 + 3 \\ y = 3 \\ z = 4 + 3 \end{cases} \Rightarrow D'(2, 3, 7)$$

b)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 4, 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, -3, 4) \\ \overrightarrow{AD'} = (-1 + \lambda, \lambda, 4 + \lambda) - (1, 2, 1) = (\lambda - 2, \lambda - 2, \lambda + 3) \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AD'} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})| \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{AD'} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & \lambda - 2 & \lambda + 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 16(\lambda - 2) - 2(\lambda - 2) - 6(\lambda + 3) + 4(\lambda + 3) + 6(\lambda - 2) - 8(\lambda - 2) \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{AD'} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})| = 12(\lambda - 2) - 2(\lambda + 3) = 12\lambda - 24 - 2\lambda - 6 = 10\lambda - 30 \Rightarrow \frac{10}{3} = \frac{1}{6} \cdot (10\lambda - 30) \Rightarrow$$

$$\frac{10}{3} = \frac{5\lambda - 15}{3} \Rightarrow 5\lambda - 15 = 10 \Rightarrow 5\lambda = 25 \Rightarrow \lambda = 5 \Rightarrow D' \begin{cases} x = -1 + 5 \\ y = 5 \\ z = 4 + 5 \end{cases} \Rightarrow D'(4, 5, 9)$$