PRIMER BLOQUE

A. Determinar el valor de $k \in \Re,\ k \neq 0$, para que se cumpla que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx}-kx-1}{kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{8\ sen\ (x)+2\ tg\ (x)}{x+sen\ (x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{8\ sen\ (x)+2\ tg\ (x)}{x+sen\ (x)}=\frac{8\ sen\ (0)+2\ tg\ (0)}{0+sen\ (0)}=\frac{8\cdot 0+2\cdot 0}{0+0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{8\ cos\ (x)+\frac{2}{cos^2\ (x)}}{1+cos\ (x)}=$$

$$=\frac{8\ cos\ (0)+\frac{2}{cos^2\ (0)}}{1+cos\ (0)}=\frac{8\cdot 1+\frac{2}{1^2}}{1+1}=\frac{10}{2}=5$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx}-kx-1}{kx^2}=\frac{e^{k\cdot 0}-k\cdot 0-1}{k\cdot 0^2}=\frac{e^0-0-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{ke^{kx}-k}{2kx}=\lim_{x\to 0}\frac{k\left(e^{kx}-1\right)}{2kx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx}-1}{2x}=\frac{e^{k\cdot 0}-1}{2\cdot 0}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{ke^{kx}}{2}\Rightarrow\frac{ke^{k\cdot 0}}{2}=5\Rightarrow\frac{ke^0}{2}=5\Rightarrow\frac{k}{2}=5\Rightarrow k=10$$

B. Determinar los valores de $a,b,c \in \Re$ para que la función $f(x)=ax^3+bx+c$ pase por el punto **(2 , 8)**, tenga un mínimo relativo en $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ y además la recta tangente a **f(x)** en el punto de abcisa **x = 1** tenga pendiente **4**. Calcula la ecuación de la recta normal a **f(x)** en el punto de abcisa **x = 1**

$$f'(x)=3ax^2+b\Rightarrow\begin{cases} f(2)=8\Rightarrow a\cdot 2^3+b\cdot 2+c=8\Rightarrow 8a+2b+c=8 \\ f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0\Rightarrow 3a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+b=0\Rightarrow\frac{3\cdot 3}{9}a+b=0\Rightarrow a+b=0\Rightarrow\begin{cases}-a-b=0\\ 3a+b=4\end{cases}\Rightarrow \\ f'(1)=4\Rightarrow 3a\cdot 1^2+b=4\Rightarrow 3a+b=4\end{cases}$$

$$2a=4\Rightarrow a=\frac{4}{2}=2\Rightarrow 2+b=0\Rightarrow b=-2\Rightarrow 8\cdot 2+2\cdot(-2)+c=8\Rightarrow 16-4+c=8\Rightarrow c=-4$$

$$f(x)=2x^3-2x-4\Rightarrow$$

$$Ecuación\ recta\ normal\Rightarrow\begin{cases} f(1)=2\cdot 1^3-2\cdot 1-4=-4 \\ m=-\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow y+4=-\frac{1}{4}(x-1)\Rightarrow y=-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}-4\Rightarrow$$

$$y=-\frac{x+15}{4}\Rightarrow 4y=-x+15\Rightarrow x+4y-15=0$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula el área determinada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x$ y el eje de abcisa

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow (x^2 - 9)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 9(-x) = -x^3 + 9x = -(x^3 - 9x) = -f(x) \Rightarrow Simétrico\ respecto\ de\ O\ (0rigen\ de\ coordenadas)$$

$$2 \in (0\ ,3) \Rightarrow f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2 = 8 - 18 = -10 < 0 \Rightarrow Negativo$$

$$A = 2\left|\int_0^3 (x^3 - 9x)\,dx\right| = 2\int_0^3 (-x^3 + 9x)\,dx = -2 \cdot \frac{1}{4} \cdot [x^4]_0^3 + 2 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^3 = -\frac{1}{2} \cdot (3^4 - 0^4) + 9 \cdot (3^2 - 0^2)$$

$$A = -\frac{81}{2} + 81 = \frac{81}{2}\ u^2$$

B. Calcula las siguientes integrales $a)\int ln\ x\ dx \quad b)\int tg\ x\ dx$

$a)$

$$\int ln\ x\ dx = x\ ln\ x - \int x\,\frac{dx}{x} = x\ ln\ x - \int dx = x\ ln\ x - x = x\,(ln\ x - 1) + K$$

$$Por\ partes \begin{cases} ln\ x = u \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = du \\ dx = dv \Rightarrow v = \int dx = x \end{cases}$$

$b)$

$$\int tg\ x\ dx = \int \frac{sen\ x}{cos\ x}\,dx = \int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -ln\ u = -ln\ cos\ x + K$$

$$Cambio\ de\ variable \Rightarrow cos\ x = u \Rightarrow -sen\ x\ dx = du \Rightarrow sen\ x\ dx = -du$$

TERCER BLOQUE

A. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula $\mathbf{A^2}$

b) Resuelve la ecuación matricial **$6A^{10}$. X = 3X + I_3**, siendo $\mathbf{I_3}$ la matriz identidad de orden **3**

$a)$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Continuación del Problema A del Tercer Bloque

b)

$$A^{10} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left(6A^{10} - 3I\right)X = I \Rightarrow \left(6A^{10} - 3I\right)^{-1}\left(6A^{10} - 3I\right)X = \left(6A^{10} - 3I\right)^{-1} I \Rightarrow X = \left(6A^{10} - 3I\right)^{-1} I \Rightarrow$$

$$X = \left(6A^{10} - 3I\right)^{-1}$$

$$6A^{10} - 3I = 6\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|6A^{10} - 3I\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -27 \Rightarrow Existe\ \left(6A^{10} - 3I\right)^{-1} \Rightarrow \left(6A^{10} - 3I\right)^{-1} = \frac{1}{\left|6A^{10} - 3I\right|}\cdot\left[adj\left(6A^{10} - 3I\right)^{t}\right] \Rightarrow$$

$$\left(6A^{10} - 3I\right)^{t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\left(6A^{10} - 3I\right)^{t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & -9 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(6A^{10} - 3I\right)^{-1} = \frac{1}{(-27)}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & -9 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B.-Enuncia el teorema de Rouché-Fröbenius.
Sea **AX** = **B** un sistema de ecuaciones lineales, escrito en forma matricial con **m** ecuaciones y **n** incógnitas. Contesta razonadamente las siguientes preguntas:
a) Si **n > m** ¿puede el sistema ser compatible determinado?
b) Si **n = m** y $|A| \neq 0$ ¿Cuál es el rango de la matriz **A/B**?, Clasifica el sistema en este caso

<u>Teorema de Rouche-Fröbenius</u>
Un sistema de ecuaciones lineales, **S**, es compatible sí, y solo sí, el rango de la matriz de los coeficientes, **A**, es igual al rango de la matriz ampliada **A/B**; es decir:
S es compatible $\Leftrightarrow$ **rang (A) = rang (A/B)**

a) Si **n > m**, o sea mas incógnitas que ecuaciones, el sistema puede ser **incompatible** siempre que $rang(A) \neq rang(A/B)$ siendo **rang (A) < rang (A/B)** o **compatible indeterminado** si **rang (A) = rang (A/B)**

b) En este caso el sistema es **compatible determinado** ya que
rang (A) = rang (A/B) = Número de incógnitas

CUARTO BLOQUE

A. Dadas los planos $\pi_1 \equiv x + y - z = 1, \pi_2 \equiv 2x + 2z = 0 \ y \ \pi_3 \equiv x + 3y + kz = 3, donde \ k \in \Re$

a) Analiza su posición relativa en función del parámetro $k \in \Re$

b) En el caso en que los tres planos se cortan en una recta, calcula las ecuaciones paramétricas de ella

$\pi_1 \equiv x + y - z = 1, \pi_2 \equiv 2x + 2z = 0 \ y \ \pi_3 \equiv x + 3y + kz = 3, donde \ k \in \Re$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix} = 2 - 6 - 6 - 2k = -10 - 2k \Rightarrow Si \ A = 0 \Rightarrow -10 - 2k = 0 \Rightarrow 2k = -10 \Rightarrow k = -5$$

$\forall k \in \Re - \{2\} \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número \ de \ incógnitas \Rightarrow Sistema \ Compatible \ Deter\min ado \Rightarrow$
$Los \ tres \ planos \ se \ cor\tan \ en \ un \ punto$

$Si \ k = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow La \ última \ es \ combinación \ lineal \ de \ las \ dos \ primeras$$

$Sistema \ Compatible \ In\det er\min ado \Rightarrow Infinitas \ soluciones \Rightarrow Se \ cor\tan \ los \ tres \ en \ una \ recta \ r \Rightarrow$

$-2y + 4z = -2 \Rightarrow y - 2z = 1 \Rightarrow y = 2z + 1 \Rightarrow x + 2z + 1 - z = 1 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow x = -z \Rightarrow$

$$r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

B. Encuentra el valor del parámetro $a \in \Re$ sabiendo que la proyección del punto **P(a , 2a , 3a)** sobre el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 12$ es **P'(8 , 13 , 17)**

El vector **PP'** es paralelo al vector director del plano por ello es igual o proporcional

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (2, 1, -1) \\ \overrightarrow{PP'} = (8, 13, 17) - (a, 2a, 3a) = (8 - a, 13 - 2a, 17 - 3a) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{8-a} = \frac{1}{13-2a} = \frac{-1}{17-3a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{8-a} = \dfrac{1}{13-2a} \Rightarrow 26 - 4a = 8 - a \Rightarrow 18 = 3a \Rightarrow a = 6 \\ \dfrac{2}{8-a} = \dfrac{-1}{17-3a} \Rightarrow 34 - 6a = -8 + a \Rightarrow 42 = 7a \Rightarrow a = 6 \end{cases} \Rightarrow a = 6$$