PRIMER BLOQUE

A. Calcula los siguientes límites: $a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^3-8x^2+7x}{x^2-x}$ $\quad b)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2x}{\pi}+\cos(x)\right]^{\frac{1}{\cos(x)}}$

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^3-8x^2+7x}{x^2-x} = \frac{0^3-8\cdot 0^2+7\cdot 0}{0^2-0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2-16x+7}{2x-1} = \frac{3\cdot 0^2-16\cdot 0+7}{2\cdot 0-1} =$$
$$= \frac{7}{-1} = -7$$

$$b)\ \ L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2x}{\pi}+\cos(x)\right]^{\frac{1}{\cos(x)}} = \left[\frac{2\cdot\frac{\pi}{2}}{\pi}+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}} = [1+0]^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow$$

$$\ln L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln\left[\frac{2x}{\pi}+\cos(x)\right]^{\frac{1}{\cos(x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)} \ln\left[\frac{2x}{\pi}+\cos(x)\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left[\frac{2x}{\pi}+\cos(x)\right]}{\cos(x)} = \frac{\ln\left[\frac{2\frac{\pi}{2}}{\pi}+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\ln(1+0)}{0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\frac{2}{\pi}-\operatorname{sen}(x)}{\frac{2x}{\pi}+\cos(x)}}{-\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\frac{2-\pi\operatorname{sen}(x)}{\pi}}{\frac{2x+\pi\cos(x)}{\pi}}}{-\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2-\pi\operatorname{sen}(x)}{2x+\pi\cos(x)}}{-\operatorname{sen}(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2-\pi\operatorname{sen}(x)}{-\operatorname{sen}(x)\cdot[2x+\pi\cos(x)]} = \frac{2-\pi\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[2\frac{\pi}{2}+\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]} = \frac{2-\pi}{(-1)[\pi+0]} = -\left(\frac{2-\pi}{\pi}\right) = \frac{\pi-2}{\pi} \Rightarrow$$

$$\ln L = \frac{\pi-2}{\pi} \Rightarrow L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2x}{\pi}+\cos(x)\right]^{\frac{1}{\cos(x)}} = e^{\frac{\pi-2}{\pi}}$$

B. Definición de punto de inflexión en un punto. Calcula el valor de los parámetros $a, b \in \Re$ para que la función $f(x) = (x-a)e^x + bx$ tenga un punto de inflexión en **x = 0** y un mínimo relativo en **x = 1**

Una función **f** tiene un punto de inflexión en **x = x_0** si en este punto la función cambia su curvatura, es decir, pasa de ser cóncava a ser convexa o de ser convexa a ser cóncava**,** y por ello, **$f''(x_0) = 0$**

$$\begin{cases} f'(x) = e^x + (x-a)e^x + b = (x-a+1)e^x + b \\ f''(x) = e^x + (x-a+1)e^x = (x-a+2)e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 0 \Rightarrow (0-a+1)e^0 + b = 0 \Rightarrow -a+1+b = 0 \\ f''(0) = 0 \Rightarrow (0-a+2)e^0 = 0 \Rightarrow -a+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$a = 2 \Rightarrow -2+1+b = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(x) = (x-2)e^x + x$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula la integral indefinida $\int\left(\frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}\right)dx$

$$\begin{array}{rl} 2x^3-9x^2+9x+6 & \lvert\, \underline{x^2-5x+6} \\ \underline{-2x^3+10x^2-12x} & 2x+1 \\ x^2-3x+6 & \\ \underline{-x^2+5x-6} & \\ 2x & \end{array}$$

$$\frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}=2x+1+\frac{2x}{x^2-5x+6}\Rightarrow x^2-5x+6=0\Rightarrow\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1\geq0\Rightarrow$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{5+1}{2}=3\\x=\frac{5-1}{2}=2\end{cases}\Rightarrow x^2-5x+6=(x-2)(x-3)\Rightarrow$$

$$\frac{2x}{x^2-5x+6}=\frac{2x}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}\Rightarrow A(x-3)+B(x-2)=2x\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=3\Rightarrow A(3-3)+B(3-2)=2\cdot3\Rightarrow B=6\\x=2\Rightarrow A(2-3)+B(2-2)=2\cdot2\Rightarrow -A=4\Rightarrow A=-4\end{cases}\Rightarrow\frac{2x}{x^2-5x+6}=\frac{-4}{x-2}+\frac{6}{x-3}$$

$$I=\int\left(\frac{2x^3-9x^2+9x+6}{x^2-5x+6}\right)dx=\int(2x+1)\,dx-4\int\frac{dx}{x-2}+6\int\frac{dx}{x-3}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2+x-4\int\frac{dt}{t}+6\int\frac{du}{u}$$

$$\begin{cases}x-2=t\Rightarrow dx=dt\\x-3=u\Rightarrow dx=du\end{cases}$$

$$I=x^2+x-4\ln t+6\ln u=x^2+x+\ln\frac{u^6}{t^4}=x^2+x+\ln\frac{(x-3)^6}{(x-2)^4}+K$$

B. Calcula la integral definida $\int_0^\pi e^x sen(x)\,dx$

$$I=\int_0^\pi e^x sen(x)\,dx=\left[e^x sen(x)\right]_0^\pi-\int_0^\pi e^x\cos(x)\,dx=\left[e^\pi sen(\pi)-e^0 sen(0)\right]-\left\{\left[e^x\cos(x)\right]_0^\pi-\int_0^\pi e^x\left[-sen(x)\right]dx\right\}$$

$$\begin{cases}sen(x)=u\Rightarrow du=\cos(x)\,dx\\e^x\,dx=dv\Rightarrow v=\int e^x\,dx=e^x\end{cases}\quad\begin{cases}\cos(x)=u\Rightarrow du=-sen(x)\,dx\\e^x\,dx=dv\Rightarrow v=\int e^x\,dx=e^x\end{cases}$$

$$I=\left(e^\pi\cdot0-1\cdot0\right)-\left[e^x\cos(x)\right]_0^\pi-\int_0^\pi e^x sen(x)\,dx=-\left[e^\pi\cos(\pi)-e^0\cos(0)\right]-I\Rightarrow 2I=-\left[e^\pi\cdot(-1)-1\cdot1\right]\Rightarrow$$

$$2I=e^\pi+1\Rightarrow I=\int_0^\pi e^x sen(x)\,dx=\frac{e^\pi+1}{2}$$

TERCER BLOQUE

A. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Encuentra la expresión general de la potencia n-esima de A. En otras palabras, calcula la expresión de A^n donde n es un número natural cualquiera

b) Razona que la matriz **A** tiene inversa para cualquier $n\in N, n\geq 1$ y calcula dicha matriz inversa

$a)$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\cdots\cdots$$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) Existe la matriz inversa cuando el determinante de la matriz no es nulo.

$$\left|A^n\right|=\begin{vmatrix}1&0&0\\n&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow\exists A^{-n}\Rightarrow A^{-n}=\frac{1}{\left|A^n\right|}\left[adj\left(A^n\right)^t\right]\Rightarrow\left(A^n\right)^t=\begin{pmatrix}1&n&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow adj\left(A^n\right)^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\-n&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-n}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\-n&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-n&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

B.- Encuentra, si es posible, un valor del parámetro $a\in\Re$ de modo que el sistema: $\begin{cases}x+y-z=1\\x-y+2z=2\\2x+z=a\end{cases}$

a) sea compatible determinado
b) sea compatible determinado
c) sea incompatible

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&2\\2&0&1\end{vmatrix}=-1+4-2-1=0\Rightarrow Ningún\ valor\ de\ a\ hace\ que\ el\ sistema\ sea\ Compatible\ Deter\min ado$$

$b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\1&-1&2&2\\2&0&1&a\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-2&3&1\\0&-2&3&a-2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-2&3&1\\0&0&0&a-2-1\end{array}\right)\Rightarrow a-3=0\Rightarrow a=3$$

$$Si\ a=3\Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2<Número\ de\ incognitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$c)\quad\forall a\in\Re-\{3\}\Rightarrow rang(A)=2\neq rang(A/B)=3\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

CUARTO BLOQUE

A. Dado los vectores $\vec{u} = (a\ ,b\ ,1)$, $\vec{v} = (-3\ ,4\ ,1)$ y $\vec{w} = (1\ ,2\ ,c)$, determina los valores de los parámetros $a,b,c \in \Re$ de manera que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v}$ donde x denota el producto vectorial. ¿Que ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en dicho caso?

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{w} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Rightarrow (a\ ,b\ ,1)\cdot(1\ ,2\ ,c) = 0 \Rightarrow a + 2b + c = 0 \\ \vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & j & k \\ a & b & 1 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix} = bc\,\vec{i} + \vec{j} + 2a\,\vec{k} - b\,\vec{k} - 2\,\vec{i} - ac\,\vec{j} = (bc-2)\,\vec{i} + (1-ac)\vec{j} + (2a-b)\,\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ \vec{v} = (-3\ ,4\ ,1) = (bc-2\ ,1-ac\ ,2a-b) \Rightarrow \begin{cases} bc - 2 = -3 \\ 1 - ac = 4 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc = -1 \\ ac = -3 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = 3b \Rightarrow 6b - b = 1 \Rightarrow \end{cases}$$

$$5b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{5} \Rightarrow a = 3\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3}{5} + 2\cdot\frac{1}{5} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{5}{5} = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{1}{5} \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{u} = \left(\frac{3}{5}\ ,\frac{1}{5}\ ,1\right) \equiv (3\ ,1\ ,5) \\ \vec{v} = (-3\ ,4\ ,1) \end{cases} \Rightarrow \cos\left(\vec{u}\ ,\vec{v}\right) = \frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|} = \frac{\left|(3\ ,1\ ,5)\cdot(-3\ ,4\ ,1)\right|}{\sqrt{3^2+1^2+5^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+4^2+1^2}} = \frac{\left|-9+4+5\right|}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{26}} = \frac{0}{\sqrt{910}}$$

$$\cos\left(\vec{u}\ ,\vec{v}\right) = 0 \Rightarrow ang\left(\vec{u}\ ,\vec{v}\right) = arc\ cos\ 0 = 90^o = \frac{\pi}{2}\ rad \Rightarrow \vec{u}\ y\ \vec{v}\ son\ perpendiculares$$

B. Dado los puntos **A(1 , 1 , 1)**, $B(1+\lambda\ ,2\ ,1-\lambda)$ y $C(1+\lambda\ ,1+\lambda\ ,2+\lambda)$, donde $\lambda \in \Re$:

a) Prueba que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ forman un ángulo de 90º, independientemente de los valores de λ

b) Determinar los valores de λ para que la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices **A**, **B** y **C** sea igual a **3**

a) Si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares su producto escalar debe de ser nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1+\lambda\ ,2\ ,1-\lambda) - (1\ ,1\ ,1) = (\lambda\ ,1\ ,-\lambda) \\ \overrightarrow{AC} = (1+\lambda\ ,1+\lambda\ ,2+\lambda) - (1\ ,1\ ,1) = (\lambda\ ,\lambda\ ,1+\lambda) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (\lambda\ ,1\ ,-\lambda)\cdot(\lambda\ ,\lambda\ ,1+\lambda)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \lambda^2 + \lambda - \lambda - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$$

Continuación del Problema B del Cuarto Bloque

b) La hipotenusa es el modulo del vector $\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{BC} = (1+\lambda\ ,1+\lambda\ ,2+\lambda) - (1+\lambda\ ,2\ ,1-\lambda) = (0\ ,\lambda - 1\ ,1+2\lambda) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = 3 \Rightarrow \sqrt{0^2 + (\lambda - 1)^2 + (1+2\lambda)^2} = 3$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1 + 4\lambda + 4\lambda^2 = 3^2 \Rightarrow 5\lambda^2 + 2\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4\cdot 5\cdot(-7) = 144 \geq 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{144}}{2\cdot 5}$$

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{-2+12}{10} = 1 \\ \lambda = \dfrac{-2-12}{10} = -\dfrac{14}{10} = -\dfrac{7}{5} \end{cases}$$