

PRIMER BLOQUE

A. Enuncia el teorema de Bolzano. Aplícalo para probar que la ecuación $2^{x-1} = 1 + (1+x)^2$ tiene al menos una solución, determinando un intervalo $[a, b]$ con $a \in \mathfrak{R}, b \in \mathfrak{R}$ y $a < b$, en el cual se encuentre dicha solución

Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[\text{sign } f(a) \neq \text{sign } f(b)]$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

Sea la función $f(x) = 2^{x-1} - 1 - (1+x)^2$, tomemos el intervalo $[5, 10]$, tomando los siguientes

valores en el extremo del intervalo $\begin{cases} f(5) = 2^{5-1} - 1 - (1+5)^2 = 16 - 1 - 36 = -11 < 0 \\ f(10) = 2^{10-1} - 1 - (1+10)^2 = 512 - 1 - 121 = 390 > 0 \end{cases}$ de tal

manera que $[\text{sign } f(5) \neq \text{sign } f(10)]$, entonces existe, al menos, un punto $c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$ y por ello $2^{c-1} - 1 - (1+c)^2 = 0$ por lo tanto $2^{c-1} = 1 + (1+c)^2$ existe, al menos, una solución de la ecuación propuesta

B. De entre todos los rectángulos de perímetro 20, ¿Cuál tiene diagonal menor?

Llamando a y b a los lados del rectángulo

$$\begin{cases} 2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a \\ D = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow D = \sqrt{a^2 + (10-a)^2} = \sqrt{a^2 + 100 - 20a + a^2} = \sqrt{2a^2 - 20a + 100}$$

$$D' = \frac{dD}{da} = \frac{4a - 20}{2\sqrt{2a^2 - 20a + 100}} = \frac{2a - 10}{\sqrt{2a^2 - 20a + 100}} \Rightarrow D' = 0 \Rightarrow 2 \frac{a - 5}{\sqrt{2a^2 - 20a + 100}} = 0 \Rightarrow a - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$a = 5$$

$$D'' = \frac{d^2D}{da^2} = 2 \frac{\sqrt{2a^2 - 20a + 100} - \frac{4a - 20}{2\sqrt{2a^2 - 20a + 100}}(a - 5)}{2a^2 - 20a + 100} = 2 \frac{\sqrt{2a^2 - 20a + 100} - \frac{(2a - 10)(a - 5)}{\sqrt{2a^2 - 20a + 100}}}{2a^2 - 20a + 100} \Rightarrow$$

$$D'' = 2 \frac{\sqrt{2a^2 - 20a + 100} - \frac{4a - 20}{2\sqrt{2a^2 - 20a + 100}}(a - 5)}{2a^2 - 20a + 100} = 2 \frac{2a^2 - 20a + 100 - (2a^2 - 10a - 10a + 50)}{\sqrt{2a^2 - 20a + 100} (2a^2 - 20a + 100)}$$

$$D'' = 2 \frac{2a^2 - 20a + 100 - 2a^2 + 20a - 50}{2(a^2 - 10a + 50)\sqrt{2a^2 - 20a + 100}} = \frac{100}{2(a^2 - 10a + 50)\sqrt{2a^2 - 20a + 100}}$$

$$D'' = \frac{50}{(a^2 - 10a + 50)\sqrt{2a^2 - 20a + 100}} \Rightarrow D''(5) = \frac{50}{(5^2 - 10 \cdot 5 + 50)\sqrt{2 \cdot 5^2 - 20 \cdot 5 + 100}} = \frac{50}{25\sqrt{50}} > 0 \Rightarrow$$

$$\text{Mínimo} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 10 - 5 = 5 \end{cases}$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Calcula el valor de la integral $\int_0^1 \frac{2 \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} dx$ (siendo **arc tg 1 = $\frac{\pi}{4}$** y **arc tg 0 = 0**)

$$2 \int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[t^2 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\left(\frac{\pi}{4} \right)^2 - 0^2 \right] = \frac{\pi^2}{16}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = t \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = dt \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

B. Para la función $f(x) = \frac{\operatorname{Ln}(x)}{x^2}$, donde **Ln(x)** significa logaritmo neperiano de **x**, se pide:

a) Determina las asíntotas horizontales de la función

b) Calcula el área comprendida entre la grafica de la función **f(x)**, el eje de abscisas y las rectas **x = e** y **x = e²** (Observa que **f(x)** es positiva en el intervalo [**e**, **e²**])

a)

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Ln}(x)}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$$

Existe asíntota horizontal, $y = 0$, cuando $x \rightarrow \infty$

No hay asíntota cuando $x \rightarrow -\infty$ ya que no está definida la función

b)

$$A = \int_e^{e^2} \frac{\operatorname{Ln}(x)}{x^2} dx = \int_e^{e^2} x^{-2} \operatorname{Ln}(x) dx = - \left[\frac{\operatorname{Ln}(x)}{x} \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \left(-\frac{1}{x} \right) \frac{dx}{x} = - \left(\frac{\operatorname{Ln} e^2}{e^2} - \frac{\operatorname{Ln} e}{e} \right) + \int_e^{e^2} \frac{dx}{x^2}$$

$$\text{Por partes} \begin{cases} \operatorname{Ln}(x) = u \Rightarrow \frac{dx}{x} \\ x^{-2} dx = dv \Rightarrow v = \int x^{-2} dx = \frac{1}{(-1)} x^{-1} = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$A = - \left(\frac{2 \operatorname{Ln} e}{e^2} - \frac{1}{e} \right) - \left[\frac{1}{x} \right]_e^{e^2} = - \left(\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e} \right) - \left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{e} - \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} - \frac{3}{e^2} = \frac{2e-3}{e^2} u^2$$

TERCER BLOQUE

A. a) Resuelve el sistema matricial
$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) Resuelve la ecuación matricial $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{X} = \mathbf{B}$ donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

a)

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ -X + Y = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ -2X + 2Y = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$XA - XI = B \Rightarrow X(A - I) = B \Rightarrow X(A - I)(A - I)^{-1} = B(A - I)^{-1} \Rightarrow XI = B(A - I)^{-1} \Rightarrow X = B(A - I)^{-1}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - I| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } (A - I)^{-1} \Rightarrow$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{|A - I|} \cdot [\text{adj}(A - I)^t] \Rightarrow (A - I)^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj}(A - I)^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = B(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$X = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-2)} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

B.- a) Discute el sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + ay + (1-a)z = 2 + a \\ x + 2az = a \\ 2x + ay - z = a \end{cases}$$

b) Cuando $a = -2$ obtén una solución tal que $\mathbf{z} = \mathbf{0}$

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1-a \\ 1 & 0 & 2a \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix} = 4a^2 + a(1-a) - 2a^2 + a = 2a^2 + a - a^2 + a = a^2 + 2a \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow a^2 + 2a = 0 \Rightarrow$$

$$(a+2)a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \end{cases}$$

$\forall a \in \mathbb{R} - \{-2, 0\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $a = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} 0z = -2 \Rightarrow z = -\frac{2}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \\ -3z = -4 \Rightarrow z = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $a = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -2 \\ 0 & 2 & -7 & -2 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{La última ecuación es combinación lineal de}$$

las otras dos $\Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

$$2y - 7z = 2 \Rightarrow 2y = 7z + 2 \Rightarrow y = \frac{7z + 2}{2} \Rightarrow x - 2 \cdot \frac{7z + 2}{2} + 3z = 0 \Rightarrow x - 7z - 2 + 3z = 0 \Rightarrow x - 4z - 2 = 0 \Rightarrow x = 4z + 2 \Rightarrow$$

$$\text{Si } z = 0 \Rightarrow y = \frac{7 \cdot 0 + 2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow x = 4 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$\text{Solución general} \Rightarrow (x, y, z) = \left(4\lambda + 2, 1 + \frac{7\lambda}{2}, \lambda \right)$$

CUARTO BLOQUE

A. a) Halla la ecuación general del plano π que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}$, y es

perpendicular al plano $\pi' \equiv x = 3$

b) Discute en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$ la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 5z = 1$ y $\pi_2 \equiv -a^2x + 2y - 5z = a$

a) El plano π está formado por el vector director de la recta r , el vector director del plano π' y el vector formado por un punto R cualquiera de la recta (tomamos el punto indicado en la ecuación) y el punto G genérico del plano.

Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector RG es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$R(2, 0, -3)$$

$$\begin{cases} v_r \equiv (1, -1, 2) \\ v_{\pi'} \equiv (1, 0, 0) \\ RG \equiv (x, y, z) - (2, 0, -3) = (x-2, y, z+3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2y + z + 3 = 0$$

b) Dos planos o son paralelos, entonces sus vectores directores son iguales o proporcionales, o coincidentes si además es también proporcional el término independiente o se cortan según una recta al no ser proporcionales o iguales.

$$\begin{cases} \vec{v}_{\pi_1} = (1, -2, 5) \\ \vec{v}_{\pi_2} = (-a^2, 2, -5) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-a^2} = \frac{-2}{2} = \frac{5}{-5} \Rightarrow \frac{1}{-a^2} = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$\forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} \Rightarrow$ No hay proporcionalidad \Rightarrow Los planos se cortan según una recta

$$\text{Si } a = -1 \Rightarrow \pi_2 \equiv -x + 2y - 5z = -1$$

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x - 2y + 5z = 1 \\ \pi_2 \equiv -x + 2y - 5z = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} = \frac{5}{-5} = \frac{1}{-1} \Rightarrow \text{Son coincidentes (el mismo plano)}$$

$$\text{Si } a = 1 \Rightarrow \pi_2 \equiv -x + 2y - 5z = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv x - 2y + 5z = 1 \\ \pi_2 \equiv -x + 2y - 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} = \frac{5}{-5} \neq \frac{1}{1} \Rightarrow \text{Son paralelos}$$

B. Dado el plano $\alpha \equiv 2x + 3y - 2z = 4$ y la recta $s \equiv \begin{cases} -x - y - az = 2 \\ 3x + 5y - 6z = a \end{cases}$, se pide:

- a) Analiza su posición relativa según los valores de los parámetros $a \in \mathfrak{R}$
 b) Calcula la distancia de la recta al plano, en los casos $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{a} = \mathbf{2}$

a) Una recta respecto a un plano puede ser que este contenido en él, que sea paralela a él o que corte al plano en un punto.

En los dos casos primeros (coincidencia y paralelismo) los vectores directores de recta y plano son perpendiculares y su producto escalar es nulo, pero estudiado esa condición tendremos que ver si cualquier punto de la recta pertenece al plano (tomaremos la indicada en su ecuación) y de verificarse tal condición la recta esta contenida en el plano, de no darse es paralela. Si el producto escalar no es nulo se cortaran en un punto.

$$s \equiv \begin{cases} -3x - 3y - 3az = 6 \\ 3x + 5y - 6z = a \end{cases} \Rightarrow 2y - (6 + 3a)z = a + 6 \Rightarrow 2y = (a + 6) + (6 + 3a)z \Rightarrow y = \frac{(a + 6) + (6 + 3a)z}{2} \Rightarrow$$

$$x + \frac{(a + 6) + (6 + 3a)z}{2} + az = -2 \Rightarrow x + \frac{(a + 6) + (6 + 3a)z + 2az}{2} = -2 \Rightarrow x + \frac{(a + 6) + (6 + 5a)z}{2} = -2$$

$$x = -2 - \frac{(a + 6) + (6 + 5a)z}{2} = -\frac{4 + (a + 6) + (6 + 5a)z}{2} = -\frac{(a + 10) + (6 + 5a)z}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_s = \left(-\frac{(6 + 5a)}{2}, \frac{(6 + 3a)}{2}, 1 \right) \equiv [-(6 + 5a), (6 + 3a), 2] \Rightarrow \vec{v}_s \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{v}_\pi = 0 \Rightarrow \\ \vec{v}_\pi = (2, 3, -2) \end{cases}$$

$$(2, 3, -2) \cdot [-(6 + 5a), (6 + 3a), 2] = 0 \Rightarrow -12 - 10a + 18 + 9a - 4 = 0 \Rightarrow -a + 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$\forall a \in \mathfrak{R} - \{2\} \Rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{v}_\pi \neq 0 \Rightarrow \vec{v}_s \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow$ No son perpendiculares los vectores directores \Rightarrow El plano y la recta se cortan en un punto

Cuando $a = 2 \Rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{v}_\pi \neq 0 \Rightarrow \vec{v}_s \perp \vec{v}_\pi \Rightarrow$ Son perpendiculares los vectores directores \Rightarrow El plano y la recta son paralelos o coincidentes (lo estudiaremos en el cálculo de distancias)

b) Cuando $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ hay punto de corte \mathbf{P} por lo tanto la distancia es nula, obtengamos ese punto

$$s \equiv \begin{cases} x = -5 - 6\lambda \\ y = 3 + 6\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (-5 - 6\lambda) + 3 \cdot (3 + 6\lambda) - 2 \cdot 2\lambda = 0 \Rightarrow -10 - 12\lambda + 9 + 18\lambda - 4\lambda = 0 \Rightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow P \begin{cases} x = -5 - 6 \cdot \frac{1}{2} = -8 \\ y = 3 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 6 \\ z = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow P(-8, 6, 1) \Rightarrow \text{La distancia es nula}$$

Continuación del Problema B del Cuarto Bloque

b) Continuación

Cuando $a = 2$ son paralelos hallaremos la distancia de un punto S cualquiera de la recta (tomaremos el indicado en su ecuación) al plano

$$s \equiv \begin{cases} x = -\frac{(a+10)}{2} - (6+5a)z \\ y = \frac{(a+6)}{2} + (6+3a)\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -6 - 16\lambda \\ y = 4 + 12\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow S(-6, 4, 0)$$

$$d(s, \alpha) = d(S, \alpha) = \frac{|2 \cdot (-6) + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{|-12 + 12 - 4|}{\sqrt{17}} = \frac{|-4|}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17} u \Rightarrow$$

Comprobamos, además, que la recta no está contenida en el plano o sea que recta y plano son paralelos