PRIMER BLOQUE

A. a) Enuncia la regla de L'Hôpital.

b) Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

a)

Sean **f(x)** y **g(x)** funciones continuas en **[a , b]**, derivables en **(a , b)**, que cumplen $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ siendo $x_0\in(a\ ,b)$ y tales que $g'(x)\neq 0$ para todo valor de x en el intervalo **(a , b)**. Entonces, si **f(x$_0$) = g(x$_0$) = 0** y existe el $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, se tiene que tambien existe el límite $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ y, además, estos limites son iguales: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\frac{e^{0^2}-1}{\cos 0-1}=\frac{e^0-1}{1-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{-\operatorname{sen} x}=\frac{2\cdot 0\cdot e^{0^2}}{-\operatorname{sen} 0}=\frac{0\cdot 1}{0}=\frac{0}{0}=$$

$$=\xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(e^{x^2}+2xe^{x^2}x\right)}{-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(e^{x^2}+2x^2e^{x^2}\right)}{-\cos x}=\frac{2\left(e^{0^2}+2\cdot 0^2e^{0^2}\right)}{-\cos 0}=\frac{2(1+0\cdot 1)}{-1}=-2$$

B. Calcula las dimensiones de 3 campos cuadrados de modo que: el perímetro del mayor sea el doble del perímetro del menor, se necesiten exactamente 1120 metros de valla para vallar los tres campos y las sumas de sus áreas sea la mínima posible. Cada campo tiene su propia valla.

Sea **a** el valor del lado menor, siendo su perímetro **4a**, el que es mayor tendrá un perímetro **8a** y el tercero, de lado **b**, **4b** de perímetro

$$\begin{cases}4a+8a+4b=1120\Rightarrow 12a+4b=1120\Rightarrow 3a+b=280\Rightarrow b=280-3a\\ A=a^2+(2a)^2+b^2=a^2+4a^2+b^2=5a^2+b^2\end{cases}\Rightarrow A=5a^2+(280-3a)^2\Rightarrow$$

$$A'=\frac{dA}{da}=10a+2\cdot(-3)(280-3a)=2\,(5a-840+9a)=2\,(14a-840)=28\,(a-60)\Rightarrow$$

$$Si\ A'=0\Rightarrow 28\,(a-60)=0\Rightarrow a-60=0\Rightarrow a=60\Rightarrow A'=\frac{dA}{da}=28>0\Rightarrow \text{Mínimo}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}a=60\ m\\ 2a=120\ m\\ b=280-3\cdot 60=100\ m.\end{cases}$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Determina un polinomio **P(x)** de segundo grado sabiendo que: **P(0) = P(2) = 1** y que $\int_0^2 P(x)dx = \frac{1}{3}$.

$$P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} P(0) = 1 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1 \\ P(2) = 1 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1 = 1 \Rightarrow 4a + 2b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \\ \int_0^2 (ax^2 + bx + 1)dx = \frac{1}{3} \Rightarrow a \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_0^2 + b \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_0^2 + \left[x\right]_0^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{8a}{3} + 2b + 2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \Rightarrow -8a - 4b = 0 \\ \frac{8a + 6b + 6}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow 8a + 6b = -5 \end{cases} \Rightarrow 2b = -5 \Rightarrow b = -\frac{5}{2} \Rightarrow 2a - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow 2a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$P(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$$

B. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, estudia:

a) Asíntotas.
b) Máximos y mínimos.
c) Intervalos de concavidad y convexidad.
d) Haz un dibujo aproximado de la gráfica aprovechando los apartados anteriores.

a)

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2 + 1}{0} = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = \infty \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{1} = \infty \Rightarrow \nexists \text{ asíntota horizontal cuando } x \to \infty$$

$$y = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(-x)^2 + 1}{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{-x} = \frac{\infty}{-\infty} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{-1} = -\infty \Rightarrow$$

$$(\text{No existe}) \nexists \text{ asíntota horizontal cuando } x \to -\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{2} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \exists \text{ asíntota oblicua } y = x \text{ cuando } x \to \infty$$

Continuación

a)Continuación

Asíntotas oblicuas (Continuación)

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} = \xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - 1\cdot x \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0 \Rightarrow \exists\ asíntota\ oblicua\ \ y = x\ cuando\ x \to -\infty$$

b)

$$f'(x) = \frac{2x\cdot x - (x^2+1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{2x\cdot x^2 - 2x(x^2-1)}{x^4} = \frac{2x^2 - 2x^2 + 2}{x^3} = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo \\ f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo \end{cases} \Rightarrow$$

$$Máximo\ relativo\ en\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{(-1)} = \frac{2}{(-1)^3} = -2$$

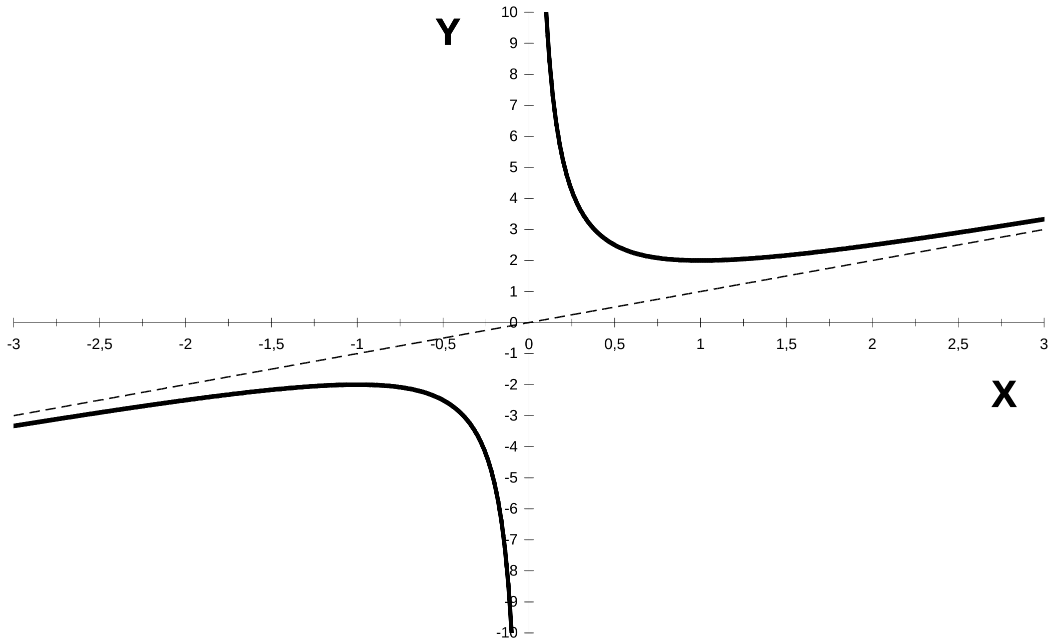
$$Mínimo\ relativo\ en\ x = 1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1^2+1}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

c)

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow Concavidad \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re \\ x^3 > 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

$Concavidad \Rightarrow \forall x \in \Re\ /\ x > 0$ $\qquad$ $Convexidad \Rightarrow \forall x \in \Re\ /\ x < 0$

d)



TERCER BLOQUE

A. Resuelve la ecuación matricial **AX – B + C = 0**, donde:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

$$AX = B-C \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(B-C) \Rightarrow IX = A^{-1}(B-C) \Rightarrow X = A^{-1}(B-C)$$

$$|A| = \begin{vmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} A^{-1} = \frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix} \\ B-C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & -2\\ -3 & -1 & 4 & 0\end{pmatrix}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -2 & -2\\ -3 & -1 & 4 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1 & -4 & 0\\ -11 & -1 & 14 & -2\end{pmatrix}$$

B. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -1\end{pmatrix}.$

a) Determina los valores de **c** tales que la matriz **A + cB** no tenga rango **2**.
b) Calcula, para los valores hallados de **c**, la matriz **A(A + cB)** y su rango.

a)

$$A+cB = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c & 0\\ 4c & -c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c+1 & -1\\ 4c+4 & 2-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c+1 & -1\\ 4\cdot[c+1] & 2-c\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}c+1 & -1\\ 0 & 2-c+4\end{pmatrix} \Rightarrow 6-c=0 \Rightarrow$$

$$c=6$$

$$Cuando\ c=6 \Rightarrow rang\ (A+cB)=1$$

b)

$$A(A+6B) = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6+1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7 & -1\\ 28 & -4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7 & -1\\ 28 & -4\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}7 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow rang\ [A(A+cB)] = 1$$

CUARTO BLOQUE

A. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$

a) Determina la ecuación de la recta ***s*** que pasa por el punto **P(2 , -1 , 0)** y corta perpendicularmente a ***r*.**
b) Calcula el punto **Q** intersección de ***r*** y ***s***.
c) Calcula el simétrico de **P** respecto a ***r***.

a) El vector formado por el punto **P** y por el punto **R** general de la recta **r,** que será el vector director de la recta **s**, es perpendicular al vector director de esta y por lo tanto su producto escalar es nulo

$$x = 1 + y \Rightarrow 3 \cdot (1 + y) - y + z = 0 \Rightarrow z = y - 3y - 3 \Rightarrow z = -3 - 2y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1 , 1 , -2) \\ \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{PR} = (1 + \lambda , \lambda , -3 - 2\lambda) - (2 , -1 , 0) = (\lambda - 1 , \lambda + 1 , -3 - 2\lambda) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{PR} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{PR} = 0 \Rightarrow$$

$$(1 , 1 , -2) \cdot (\lambda - 1 , \lambda + 1 , -3 - 2\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda - 1 + \lambda + 1 + 6 + 4\lambda = 0 \Rightarrow 6 + 6\lambda = 0 \Rightarrow 6\lambda = -6 \Rightarrow$$

$$\lambda = -\frac{6}{6} = -1 \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (-1 - 1 , -1 + 1 , -3 - 2(-1)) = (-2 , 0 , -3 + 2) = (-2 , 0 , -1) \equiv (2 , 0 , 1) \Rightarrow$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\mu \\ y = -1 \\ z = \mu \end{cases}$$

b)

$$Q \begin{cases} x = 1 + (-1) \\ y = (-1) \\ z = -3 - 2 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow Q(0 , -1 , -1)$$

c) Para hallar el punto simétrico de **P**, después de conocer el valor de **Q,** que es el punto medio entre **P** y **P'** utilizaremos la fórmula que determina el valor de ese punto medio

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{2 + x_{P'}}{2} \Rightarrow x_{P'} = 2 \cdot 0 - 2 = -2 \\ -1 = \dfrac{-1 + y_{P'}}{2} \Rightarrow y_{P'} = 2 \cdot (-1) + 1 = -1 \Rightarrow P'(-2 , -1 , -2) \\ -1 = \dfrac{0 + y_{P'}}{2} \Rightarrow y_{P'} = 2 \cdot (-1) - 0 = -2 \end{cases}$$

B. Considera los cuatro puntos **A(1 ,0 , 1)**, **B(1 , 1 , 0)**, **C(0 , 1 , 1)** y **D(1 , k , k-1).**

a) Halla **k** para que los cuatro puntos sean coplanarios (estén en el mismo plano).
b) ¿Qué valores de **k** hacen que el volumen del tetraedro determinado por los cuatro puntos sea **30** unidades de volumen?

a) Al tener que ser coplanarios los vectores **AB**, **AC** y **AD** es condición que determina que uno de ellos es combinación lineal de los otros dos y por ello, el determinante de la matriz que forman es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1\ ,1\ ,0) - (1\ ,0\ ,1) = (0\ ,1\ ,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (0\ ,1\ ,1) - (1\ ,0\ ,1) = (-1\ ,1\ ,0) \\ \overrightarrow{AD} = (1\ ,k\ ,k-1) - (1\ ,0\ ,1) = (0\ ,k\ ,k-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & k & k-2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k + k - 2 = 0 \Rightarrow 2k - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$2k = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{2} = 1$$

b) El volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto (producto escalar por vectorial) de los vectores **AB**, **AC** y **AD**

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \cdot \left| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right| \right|$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1\ ,1\ ,0) - (1\ ,0\ ,1) = (0\ ,1\ ,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (0\ ,1\ ,1) - (1\ ,0\ ,1) = (-1\ ,1\ ,0) \\ \overrightarrow{AD} = (1\ ,k\ ,k-1) - (1\ ,0\ ,1) = (0\ ,k\ ,k-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \left| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right| = \begin{vmatrix} 0 & k & k-2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k + k - 2 = 2k - 2 \Rightarrow$$

$$30 = \frac{1}{6} \cdot (2k - 2) \Rightarrow 2k - 2 = 180 \Rightarrow 2k = 182 \Rightarrow k = \frac{182}{2} = 91$$