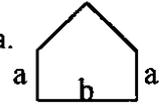


PRIMER BLOQUE

A. El perímetro de la ventana del dibujo mide 6 metros. Los dos lados superiores forman entre sí un ángulo de 90° .

Calcula la longitud de los lados a y b para que el área de la ventana sea máxima.



Llamando C a los dos lados superiores y h a la altura del triángulo rectángulo isósceles

$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow 2c^2 = b^2 \Rightarrow c^2 = \frac{b^2}{2} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{b^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b\sqrt{2}}{2} \\ h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c^2 \Rightarrow h^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{2} \Rightarrow h^2 = \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{b^2}{4}} = \frac{b}{2} \\ 6 = 2a + b + 2c \Rightarrow 6 = 2a + b + 2 \cdot \frac{b\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 6 = 2a + b(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow 2a = 6 - b(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow \\ A = a \cdot b + \frac{1}{2}bh = b \cdot \left(a + \frac{h}{2}\right) = b \cdot \left(a + \frac{\frac{b}{2}}{2}\right) = b \cdot \left(a + \frac{b}{4}\right) = \frac{b}{4} \cdot (4a + b) \end{array} \right.$$

$$A = \frac{b}{4} \cdot [12 - 2b(1 + \sqrt{2}) + b] = \frac{b}{4} \cdot [12 - 2b(1 + \sqrt{2}) + 2 \cdot \frac{b}{2}] = \frac{b}{4} \cdot \left[12 - 2b\left(1 + \sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$A = \frac{b}{4} \cdot \left[12 - 2b\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)\right] = \frac{b}{4} \cdot \left[12 - 2b\left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{b}{4} \cdot [12 - b \cdot (1 + 2\sqrt{2})]$$

$$A = \frac{1}{4} [12b - b^2 \cdot (1 + 2\sqrt{2})]$$

$$A' = \frac{dA}{db} = \frac{1}{4} \cdot [12 - 2b \cdot (1 + 2\sqrt{2})] = \frac{1}{2} \cdot [6 - b \cdot (1 + 2\sqrt{2})] \Rightarrow$$

$$A' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot [6 - b \cdot (1 + 2\sqrt{2})] = 0 \Rightarrow 6 - b \cdot (1 + 2\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow b \cdot (1 + 2\sqrt{2}) = 6 \Rightarrow$$

$$b = \frac{6}{1 + 2\sqrt{2}} \Rightarrow A'' = \frac{d^2A}{db^2} = \frac{-(1 + 2\sqrt{2})}{2} < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow$$

Continuación del Problema A del Primer Bloque

$$\left\{ \begin{aligned} & b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}} \\ a &= 3 - \frac{b(1+\sqrt{2})}{2} \Rightarrow a = 3 - \frac{6 \cdot (1+\sqrt{2})}{2(1+2\sqrt{2})} = 3 - \frac{3 \cdot (1+\sqrt{2})}{1+2\sqrt{2}} = \frac{3+6\sqrt{2}-3-3\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} \\ b &= \frac{6 \cdot (1-2\sqrt{2})}{(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})} = \frac{6 \cdot (1-2\sqrt{2})}{1^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{6 \cdot (1-2\sqrt{2})}{1-8} = \frac{6 \cdot (1-2\sqrt{2})}{-7} = \frac{6 \cdot (2\sqrt{2}-1)}{7} m \\ a &= \frac{3\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} = \frac{3(1-2\sqrt{2})\sqrt{2}}{(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})} = \frac{3(1-2\sqrt{2})\sqrt{2}}{-8} = \frac{3(2\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{7} m \end{aligned} \right.$$

B. Utiliza las propiedades de los determinantes para desarrollar el siguiente:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 3x+2 \\ x & 2x+3 & 3x+4 \\ x & 2x+5 & 3x+6 \end{vmatrix}$$

Enuncia las propiedades que has utilizado.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x & 2x & 3x+2 \\ x & 2x & 3x+4 \\ x & 2x & 3x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 3x+2 \\ x & 3 & 3x+4 \\ x & 5 & 3x+6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & x & 3x+2 \\ x & x & 3x+4 \\ x & x & 3x+6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 3x+2 \\ x & 3 & 3x+4 \\ x & 5 & 3x+6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 + \begin{vmatrix} x & 1 & 3x \\ x & 3 & 3x \\ x & 5 & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x & 3 & 4 \\ x & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ & = 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ x & 3 & x \\ x & 5 & x \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 2 \\ x & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 2 \\ x & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 3 & 2 \\ x & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2x \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ & = 2x \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4x \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

SEGUNDO BLOQUE

A. Enuncia la regla de L'Hôpital. Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x} \right)$.

(L= logaritmo neperiano)

Sean **f(x)** y **g(x)** funciones continuas en **[a , b]**, derivables en **(a , b)**, que cumplen

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ siendo $x_0 \in (a , b)$ y tales que $g'(x) \neq 0$ para todo valor de x en el

intervalo **(a , b)**. Entonces, si **f(x₀) = g(x₀) = 0** y existe el $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, se tiene que también

existe el límite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y, además, estos límites son iguales: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Continuación del Problema A del Segundo Bloque

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{L(1+x)} - \frac{1}{x} \right) &= \frac{1}{L(1+0)} - \frac{1}{0} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - L(1+x)}{x L(1+x)} = \frac{0 - L(1+0)}{0 L(1+0)} = \\
&= \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{L(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1+x-1}{1+x}}{(1+x)L(1+x) + x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)L(1+x) + x} = \frac{0}{(1+0) \cdot L(1+0) + 0} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1+x}{1+x} + L(1+x) + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + L(1+x) + 1} = \frac{1}{2 + L(1+0)} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

B. Las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x+y-z = 4 \\ x+2y = 7 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$ se cruzan en el espacio.

- Escribe las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.
- Halla un punto de r y otro de s tales que el vector con origen en uno y extremo en el otro sea perpendicular a ambas rectas.

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} x=7-2y \Rightarrow 7-2y+y-z=4 \Rightarrow z=7-y-4 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=7-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases} \\ \\ s \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\mu \end{cases} \end{array} \right.$$

Continuación del Problema B del Segundo Bloque

b) El vector director de la recta t se obtendrá como apoyo en los puntos generales de las dos rectas y es perpendicular a las dos por lo tanto los productos escalares de ese vector con el de r es nulo y lo mismo con el vector director de s , de las ecuaciones obtenidas obtendremos constantes para determinar los puntos R y S pedidos

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_t = [7 - 2\lambda - 2, \lambda - (-5), 3 - \lambda - \mu] = (5 - 2\lambda, \lambda + 5, 3 - \lambda - \mu) \\ \vec{v}_r = (-2, 1, -1) \\ \vec{v}_s = (0, 0, 1) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_t \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_r = 0 \\ \vec{v}_t \perp \vec{v}_s \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_s = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (5 - 2\lambda, \lambda + 5, 3 - \lambda - \mu) \cdot (-2, 1, -1) = 0 \Rightarrow -10 + 4\lambda + \lambda + 5 - 3 + \lambda + \mu = 0 \\ (5 - 2\lambda, \lambda + 5, 3 - \lambda - \mu) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Rightarrow 3 - \lambda - \mu = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 6\lambda + \mu - 8 = 0 \\ 3 - \lambda - \mu = 0 \end{array} \right. \Rightarrow 5\lambda - 5 = 0 \Rightarrow 5\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow 3 - 1 - \mu = 0 \Rightarrow 2 - \mu = 0 \Rightarrow \mu = 2$$

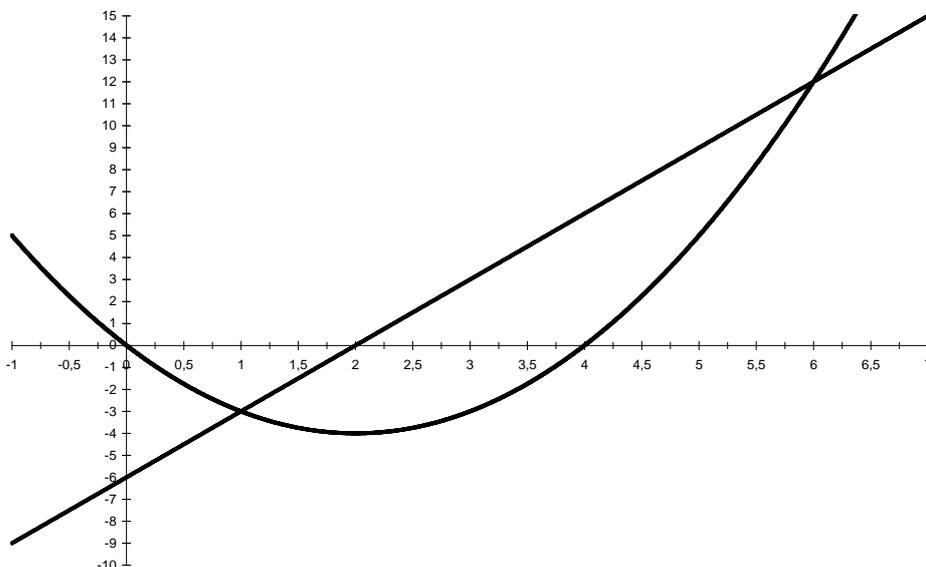
$$R \left\{ \begin{array}{l} x = 7 - 2 \cdot 1 \\ y = 1 \\ z = 3 - 1 \end{array} \right. \Rightarrow R(5, 1, 2) \qquad S \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -5 \\ z = 2 \end{array} \right. \Rightarrow S(2, -5, 2)$$

TERCER BLOQUE

A. Dada la curva $y = x^2 - 4x$ y la recta $y = 3x - 6$:

- Dibuja la gráfica de ambas.
- Señala el recinto plano comprendido entre ellas.
- Calcula el área del recinto señalado.

a) y b)



Continuación del Problema A del Tercer Bloque

$$\text{Puntos de corte con el eje } OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-6=0 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2 \\ x^2-4x=0 \Rightarrow (x-4)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2-4x=3x-6 \Rightarrow x^2-7x+6=0 \Rightarrow \Delta=(-7)^2-4 \cdot 1 \cdot 6=25$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7+5}{2} = 6 \\ x = \frac{7-5}{2} = 1 \end{cases}$$

$$A = \left| \int_1^2 (x^2 - 4x) dx \right| - \left| \int_1^2 (3x - 6) dx \right| + \int_2^6 (3x - 6) dx - \int_2^6 (x^2 - 4x) dx =$$

$$A = -\int_1^2 (x^2 - 4x) dx + \int_1^2 (3x - 6) dx + \int_2^6 (3x - 6) dx - \int_2^6 (x^2 - 4x) dx = \int_1^6 (3x - 6) dx - \int_1^6 (x^2 - 4x) dx =$$

$$A = \int_1^6 (3x - 6 - x^2 + 4x) dx = \int_1^6 (-x^2 + 7x - 6) dx = -\frac{1}{3} \cdot [x^3]_1^6 + 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_1^6 - 6 \cdot [x]_1^6$$

$$A = -\frac{1}{3} \cdot (6^3 - 1^3) + \frac{7}{2} \cdot (6^2 - 1^2) - 6 \cdot (6 - 1) = -\frac{125}{3} + \frac{7 \cdot 35}{2} - 30 = \frac{-250 + 735 - 180}{6} = \frac{305}{6} u^2$$

B. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde λ es un número real.

Encuentra los valores de λ para los que la matriz $A \cdot B$ es invertible.

Para que una matriz tenga inversa es condición necesaria que su determinante no sea nulo

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1+2\lambda & 3+2\lambda \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1+2\lambda - (1-\lambda) \cdot (3+2\lambda) = 1+2\lambda - 3 - 2\lambda + 3\lambda + 2\lambda^2 = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2$$

$$\text{Si } |A \cdot B| = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25 > 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{-3-5}{4} = -2 \end{cases} \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} - \left\{ -2, \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow |A \cdot B| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } \exists (A \cdot B)$$

CUARTO BLOQUE

A. Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal (recta perpendicular a la tangente) en el punto de abscisa 0, a la gráfica de la función f dada por $f(x) = 2xe^x + \frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$.

$$f'(x) = 2 \cdot (e^x + xe^x) + \frac{3x^2(x^2 + 4) - 2x(x^3 - 2)}{(x^2 + 4)^2} = 2e^x(1+x) + \frac{3x^4 + 12x^2 - 2x^4 + 4x}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = 2e^x(1+x) + \frac{x^4 + 12x^2 + 4x}{(x^2 + 4)^2}$$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \cdot 0 \cdot e^0 + \frac{0^3 - 2}{0^2 + 4} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ f'(0) = 2e^0(1+0) + \frac{0^4 + 12 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0}{(0^2 + 4)^2} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{0}{16} = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Ec. tangente} \Rightarrow m = 2 \Rightarrow y - \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot (x - 0) \Rightarrow y + \frac{1}{2} = 2x \Rightarrow y = 2x - \frac{1}{2} \Rightarrow 4x - 2y - 1 = 0$$

$$\text{Ec. normal} \Rightarrow m' = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 0) \Rightarrow y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow x + 2y + 1 = 0$$

B. Considera la recta r dada por $r \equiv \begin{cases} x - 4y + 9 = 0 \\ 3y - z - 9 = 0 \end{cases}$.

- Determina el plano que pasa por el punto $P(1, 4, 0)$ y contiene a r .
- ¿Para cualquier valor de λ , el plano $x - 4y + 9 + \lambda(3y - z - 9) = 0$ contiene a r ?
- Determina los valores de λ para que el plano diste 3 unidades del origen de coordenadas.

a) Para hallar el plano π tomaremos el vector director de la recta r , el vector formado por un punto R cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) y por el punto P y el vector formado por P y G , siendo este punto el generador del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector \overrightarrow{PG} es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$x = 4y - 9 \Rightarrow z = 3y - 9 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -9 + 4\mu \\ y = \mu \\ z = -9 + 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (4, 1, 3) \\ R(-9, 0, -9) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (4, 1, 3) \\ \overrightarrow{PR} = (-9, 0, -9) - (1, 4, 0) = (-10, -4, -9) \equiv (10, 4, 9) \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z \\ 4 & 1 & 3 \\ 10 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0 \\ \overrightarrow{PR} = (x, y, z) - (1, 4, 0) = (x-1, y-4, z) \end{cases}$$

Continuación del Problema B del Cuarto Bloquea) *Continuación*

$$9 \cdot (x-1) + 30 \cdot (y-4) + 16z - 10z - 12 \cdot (x-1) - 36 \cdot (y-4) = 0 \Rightarrow$$

$$(-3) \cdot (x-1) - 6 \cdot (y-4) + 6z = 0 \Rightarrow (x-1) + 2 \cdot (y-4) - 2z = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 2y - 2z - 8 = 0$$

b) Para que se cumpla tal condición primeramente el producto escalar de los vectores directores de haz de planos y la recta tiene que ser nulo y finalmente debe de contener a un punto cualquiera de la recta (tomaremos **R**)

$$\text{Haz de planos} \Rightarrow x + (3\lambda - 4)y - \lambda z + 9 - 9\lambda = 0$$

$$\begin{cases} v_r = (4, 1, 3) \\ v_{HP} = (1, 3\lambda - 4, -\lambda) \end{cases} \Rightarrow v_r \perp v_{HP} \Rightarrow v_r \cdot v_{HP} = 0 \Rightarrow (4, 1, 3) \cdot (1, 3\lambda - 4, -\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$4 + 3\lambda - 4 - 3\lambda = 0 \Rightarrow 0\lambda = 0 \Rightarrow \text{Infinitas soluciones} \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Vectores perpendiculares}$$

$$\text{Veamos si contiene } R \Rightarrow -9 + (3\lambda - 4) \cdot 0 - \lambda \cdot (-9) + 9 - 9\lambda = 0 \Rightarrow -9 + 9\lambda + 9 - 9\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$0\lambda = 0 \Rightarrow \text{Infinitas soluciones} \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Contiene todos los puntos de la recta}$$

c)

$$d(HP, O) = 3 = \pm \frac{0 + (3\lambda - 4) \cdot 0 - \lambda \cdot 0 + 9 - 9\lambda}{\sqrt{1^2 + (3\lambda - 4)^2 + (-\lambda)^2}} \Rightarrow 3 \cdot \sqrt{1 + (3\lambda - 4)^2 + \lambda^2} = \pm(9 - 9\lambda) \Rightarrow$$

$$3 \cdot \sqrt{1 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 16 + \lambda^2} = \pm 9(1 - \lambda) \Rightarrow \sqrt{10\lambda^2 - 24\lambda + 17} = \pm 3(1 - \lambda) \Rightarrow$$

$$10\lambda^2 - 24\lambda + 17 = 9 \cdot (1 - \lambda)^2 \Rightarrow 10\lambda^2 - 24\lambda + 17 = 9 - 18\lambda + 9\lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{6+2}{2} = 4 \\ \lambda = \frac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$