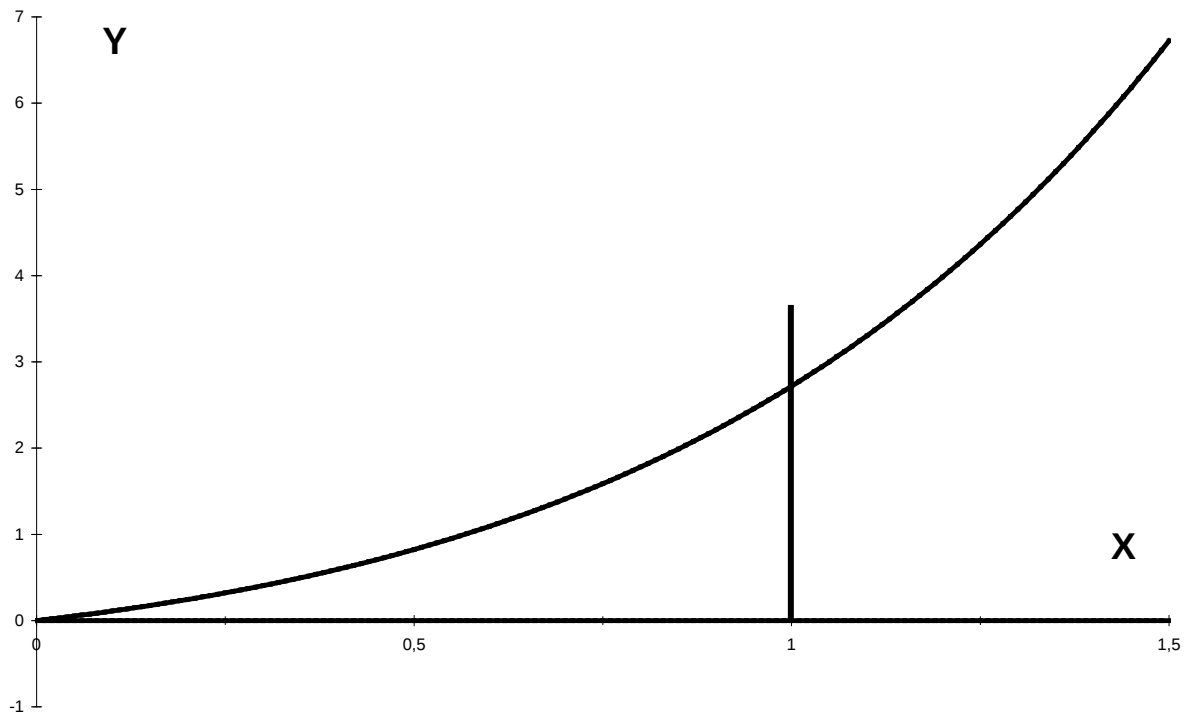


**PRIMER BLOQUE**

**A** Dada la función  $y = xe^x$  y las rectas  $x = 1$  e  $y = 0$

- Dibuja la gráfica de la función para  $x \geq 0$  y la de las rectas.
- Señala el recinto plano comprendido entre las tres gráficas anteriores.
- Calcula el área del recinto plano señalado.

a) y b)



$$A = \int_0^1 xe^x dx = \left[ xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = (1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0) - \left[ e^x \right]_0^1 = (e - 0 \cdot 1) - (e - 1) = e - e + 1 = 1 \text{ u}^2$$

$$\text{Por partes} \Rightarrow \begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$$

**B** Dadas las rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases}$$

a) Estudia la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ .

b) En el caso de que  $r$  y  $s$  se corten calcula las coordenadas del punto de corte

Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.

Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio

$$\begin{cases} 2 - 3\lambda = 1 - \mu \\ 3 + 5\lambda = 2\mu \\ \lambda = 5 \end{cases} \Rightarrow 3 + 5 \cdot 5 = 2\mu \Rightarrow 2\mu = 28 \Rightarrow \mu = 14 \Rightarrow 2 - 3 \cdot 5 = 1 - 14 \Rightarrow -13 = -13 \Rightarrow$$

*Sistema compatible determinado  $\Rightarrow$  Tienen un punto, al menos, de corte*

$$\text{Veamos si son coincidentes} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-3, 5, 1) \\ \vec{v}_s = (-1, 2, 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{-3}{-1} \neq \frac{5}{2} \Rightarrow \text{No son coincidentes}$$

$$\text{Se cortan } r \text{ y } s \text{ en un punto } P \Rightarrow P \begin{cases} x = 2 - 3 \cdot 5 \\ y = 3 + 5 \cdot 5 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow P(-13, 28, 5)$$

**SEGUNDO BLOQUE****A** Resuelve  $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} dx$ 

$$x^3 + x = (x^2 + 1)x \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} = \frac{x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + x(Bx + C)}{x(x^2 + 1)} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 1)}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} = \frac{(A + B)x^2 + Cx + A}{x(x^2 + 1)} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ C = -1 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 + B = 1 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} = \frac{1}{x} + \frac{0 \cdot x - 1}{x^2 + 1} \Rightarrow \int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x} dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \ln x + \arctan x + K$$

**B** Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla paso a paso la inversa de la matriz  $A$ b) Resuelve la siguiente ecuación matricial  $AX - B = A \cdot B$ 

a) Par tener inversa una matriz su determinante no debe de ser nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow (\text{Existe}) \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**Continuación problema B del Segundo Bloque**

b)

$$AX = AB + B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}AB + A^{-1}B \Rightarrow IX = IB + A^{-1}B \Rightarrow X = B(I + A^{-1})$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

**TERCER BLOQUE**

**A** Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x+b & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$  determina.  $a$  y  $b$  para que  $f(x)$  sea continua y no derivable en  $x = 0$

Continuidad

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + b = b \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a \cdot 0^2 + 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow b = 3$$

Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2ax & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2a \cdot 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow \text{No es derivable}$$

Para todo valor de  $a \in \mathbb{R}$  y de  $b = 3$  la función es continua y no derivable en  $x = 0$

**B** Discute y resuelve - en los casos que sea posible - el siguiente sistema: 
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Por Ruffini} \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & 1 & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -2 \\ & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)$$

$$a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a-1)^2(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a+2=0 \Rightarrow a=-2 \end{cases}$$

$\forall a \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sist. Comp. Determ.}$

*Solución cuando es Sistema Compatible Determinado.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{a^3 - 3a + 2} = \frac{a^2 + 1 + 1 - a - a - 1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a^2 - 2a + 1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{a^3 - 3a + 2} = \frac{a^2 + 1 + 1 - 1 - a - a}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a^2 - 2a + 1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{a^3 - 3a + 2} = \frac{a^2 + 1 + 1 - a - a - 1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a^2 - 2a + 1}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left( \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2} \right)$$

**Continuación problema B del Tercer Bloque**Si  $a = 1$ 

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{La segunda y tercera ecuación son combinación lineal}$$

de la primera  $\Rightarrow$  Sistema Compatible Indeterminado  $\Rightarrow x = 1 - y - z$ Solución  $\Rightarrow (x, y, z) = (1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu)$ Si  $a = -2$ 

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$0z = 6 \Rightarrow z = \frac{6}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

**CUARTO BLOQUE****A** Enuncia la Regla de L'Hôpital y calcula  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1}$ Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones continuas en  $[a, b]$ , derivables en  $(a, b)$ , que cumplen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  siendo  $x_0 \in (a, b)$  y tales que  $g'(x) \neq 0$  para todo valor de  $x$  en elintervalo  $(a, b)$ . Entonces, si  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  y existe el  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , se tiene que tambiénexiste el límite  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  y, además, estos límites son iguales:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 2x^2 + 1} &= \frac{1^3 - 3 \cdot 1 + 2}{1^4 - 2 \cdot 1^2 + 1} = \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{4x^3 - 4x} = \frac{3 \cdot 1^2 - 3}{4 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1} = \\ &= \frac{0}{0} = \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{12x^2 - 4} = \frac{6 \cdot 1}{12 \cdot 1^2 - 4} = \frac{6}{12 - 4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

**B** Dadas las rectas  $s \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ , y  $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-a}{a-1} = \frac{z-3}{3}$

a) Calcula el valor de  $a$  para que las rectas  $r$  y  $s$  sean perpendiculares.

En el caso de que  $r$  y  $s$  se corten:

b) Calcula las coordenadas del punto de intersección de las rectas  $r$  y  $s$ .

c) Halla la ecuación del plano que determinan las rectas  $r$  y  $s$ .

a) Si son perpendiculares lo son sus vectores directores y su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \vec{v}_s = (4, -2, 2) \equiv (2, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, a-1, 3) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (2, -1, 1) \cdot (1, a-1, 3) = 0$$

$$2 - a + 1 + 3 = 0 \Rightarrow 6 - a = 0 \Rightarrow a = 6$$

b) Analizaremos si las rectas tienen un punto común, de tenerlo estudiaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, si este caso se da, las rectas son coincidentes, de no darse este último supuesto las rectas se cortan en un punto, son secantes.

Si no tienen punto común, y hay igualdad o proporcionalidad entre los vectores directores las rectas son paralelas, de no haberlo las rectas se cruzan en el espacio.

$$\begin{cases} \vec{v}_s = (4, -2, 2) \equiv (2, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (1, a-1, 3) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_s \perp \vec{v}_r \Rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (2, -1, 1) \cdot (1, a-1, 3) = 0$$

$$\begin{cases} s \equiv \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 6 + 5\mu \\ z = 3 + 3\mu \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda = 1 + \mu \\ 1 - 2\lambda = 6 + 5\mu \\ 2\lambda = 3 + 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda - \mu = 1 \\ 2\lambda + 5\mu = -5 \\ 2\lambda - 3\mu = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

**Continuación problema B del Cuarto Bloque**

Para que sea Compatible Determinado  $\Rightarrow |A/B| = 0 \Rightarrow$

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 60 + 10 - 6 - 10 - 60 + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 1 \\ -4 & -10 & 10 \\ -4 & 6 & -6 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 1 \\ 0 & -11 & 11 \\ 0 & -5 & -5 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$-\mu = 1 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow \text{Punto de corte} \Rightarrow P \begin{cases} x = 1 + (-1) \\ y = 6 + 5 \cdot (-1) \\ z = 3 + 3 \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow P(0, 1, 0)$$

c) Para determinar el plano  $\pi$  que contiene a  $r$  y  $s$  contamos con sus vectores directores y con el vector formado por el punto  $P$  de corte y el punto  $G$ , estos tres vectores son coplanarios y el vector  $\overrightarrow{PG}$  es combinación lineal de los otros dos y el determinante de la matriz que forman es nula y la ecuación del plano.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (2, -1, 1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1, 5, 3) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (0, 1, 0) = (x, y-1, z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-3x + y - 1 + 10z + z - 5x - 6y + 6 = 0 \Rightarrow -8x - 5y + 11z + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 8x + 5y - 11z - 5 = 0$$