PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que se puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-4z=0 \\ 3x+ay+2z=2 \end{cases}$, en función del parámetro a:

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

b) Resuelve el sistema para $a=-1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & a & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & a & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & a & 2 \end{vmatrix}=6+2a-12-9+4a-4=0;\;\; 6a-19=0;$$

$6a=19 \Rightarrow a=\frac{19}{6}$.

$$\underline{Para\ a \neq \frac{19}{6} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ m=\frac{19}{6} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & \frac{19}{6} & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 8 + 24 - 4 = 20 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ m = \frac{19}{4} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $m = -1$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - 4z = 0 \\ 3x - y + 2z = 2 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-6-19} = \frac{12-8-6-8}{-25} = \frac{-10}{-25} = \frac{2}{5}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-25} = \frac{4-24+8-8}{-25} = \frac{-20}{-25} = \frac{4}{5}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-25} = \frac{6-4-18-4}{-25} = \frac{-20}{-25} = \frac{4}{5}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{2}{5},\ y = z = \frac{4}{5}.}$$

****

2º) Un estudio basado en los datos censales sobre la evolución de la población en una ciudad española revela que, en el periodo 2.005-2.015, el número de habitantes (en miles) sigue la función $p(t) = (t-2)^2(1-2t) + 252t + 116$, donde t indica el tiempo medido en años, siendo $t = 0$ el tiempo correspondiente al año 2.005. Tomando $p(t)$, determina los periodos de crecimiento y decrecimiento del número de habitantes de dicha ciudad. ¿En qué momento del tiempo el número de habitantes es máximo? ¿Qué número de habitantes tiene la ciudad en ese momento?

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$p'(t) = 2 \cdot (t-2) \cdot (1-2t) + (t-2)^2 \cdot (-2) + 252 =$$

$$= (2t-4) \cdot (1-2t) - 2 \cdot (t^2 - 4t + 4) + 252 =$$

$$= 2t - 4t^2 - 4 + 8t - 2t^2 + 8t - 8 + 252 = -6t^2 + 18t + 240.$$

$$p'(t) = 0 \Rightarrow -6t^2 + 18t + 240 = 0;\ \ t^2 - 3t - 40 = 0;\ \ t = \frac{3 \pm \sqrt{9+160}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{3 \pm 13}{2} \Rightarrow t_1 = -5, t_2 = 8.$$

La raíz negativa carece de sentido lógico, por lo cual, $t = 8$.

Por ser $p(t)$ una función polinómica, la raíz $t = 8$ divide al dominio de la función en dos periodos donde la función es creciente o decreciente alternativamente.

Considerando, por ejemplo, $t = 1 \in [2.005;\ 2.008]$ es:

$$p'(1) = -6 + 18 + 240 = 252 > 0 \Rightarrow Creciente.$$

$$\underline{Crecimiento: p'(t) > 0 \Rightarrow t \in (2.005; 2.013)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: p'(t) < 0 \Rightarrow t \in (2.013; 2.015)}.$$

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$p''(t) = -12t + 18.$$

$$p''(8) = -12 \cdot 8 + 18 = -96 + 18 = -78 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 8.$$

$$\underline{El\ nº\ de\ habitantes\ es\ máximo\ para\ t = 8\ (año\ 2.013)}.$$

$$p(8) = (8-2)^2(1-16) + 252 \cdot 8 + 116 = 36 \cdot (-15) + 2.016 + 116 =$$

$$= -540 + 2.132 = 1.592.$$

$\underline{El\ máximo\ número\ de\ habitantes\ fue\ de\ 1.592.000}.$

****

3º) Las autoridades sanitarias están estudiando los efectos del tabaco en la salud. El tiempo que tarda un fumador en dejar definitivamente de fumar se ajusta a una distribución normal, de media 5 meses y desviación típica 2 meses. Con esta información:

a) Calcula la probabilidad de que un fumador tarde más de 4 meses en dejar definitivamente de fumar.

b) Si se toman 50 fumadores, calcula la probabilidad de que el tiempo medio que tardan los 50 fumadores en dejar definitivamente de fumar sea inferior a 6 meses.

----

a)

$Datos$: $\mu = 5$; $\sigma = 2$.

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(5, 2)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-5}{2}$.

$P = P(X > 4) = P\left(Z \geq \frac{4-5}{2}\right) = P\left(Z \geq \frac{-1}{2}\right) = P(Z \geq -0{,}5) =$

$= P(Z \geq -0{,}5) = P(Z < 0{,}5) = \underline{0{,}6915}$.

b)

$Datos$: $n = 50$; $\mu = 5$; $\sigma = 2$.

$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow N\left(5, \frac{2}{\sqrt{50}}\right) = N(5;\ 0{,}28)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-5}{0{,}28}$.

$P = P(X < 6) = P\left(Z < \frac{6-5}{0{,}28}\right) = P\left(Z < \frac{1}{0{,}28}\right) = P(Z < 3{,}57) = \underline{0{,}9998}$.

****

4º) La ficha técnica del estudio social “Influencers en redes sociales” indica que se ha encuestado a 1.096 individuos de 16 a 55 años de edad residentes en España. La muestra se ha tomado de manera estratificada, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos que se declaran seguidores de Influencers es $\pm$ 3 % con un nivel del confianza del 95,5 %. Para esta ficha técnica, identifica los siguientes elementos: población, diseño muestral, tamaño de la muestra, parámetro estimado.

$$\underline{Población: Todos\ los\ españoles\ comprendidos\ entre\ 16\ y\ 55\ años.}$$

$$\underline{Diseño\ muestral: Aleatorio\ simple\ estratificado.}$$

$$\underline{Tamaño\ de\ la\ muesta: 1.096\ individuos}.$$

$$\underline{\begin{array}{c} Proporción\ de\ españoles\ entre\ 16\ y\ 55\ años\ seguidores\ de\ influencers, \\ con\ error\ menor\ del\ 3\ \%\ y\ nivel\ de\ confianza\ del\ 95{,}5\ \%\ . \end{array}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Una familia de 3 miembros recibe la devolución de los impuestos abonados en la campaña RENTA 2.017 por un importe total de 3.250 euros. Sabiendo que la madre recibe el doble que el hijo y que el padre recibe 2/3 de lo que recibe la madre, calcula el importe de la devolución que recibe cada miembro de la familia.

Sean x, y, z los euros que devuelve hacienda a la madre, el padre y el hijo, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3.250 \\ x=2z \\ y=\frac{2}{3}x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=3.250 \\ x-2z=0 \\ 2x-3y=0 \end{array}\right\}.$$

Se resuelve por sustitución; $y=\frac{2}{3}x, z=\frac{1}{2}x$:

$x+y+z=3.250$; $x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x=3.250$; $6x+4x+3x=6\cdot 3.250$;

$13x=6\cdot 3.250 \Rightarrow x=\frac{6\cdot 3.250}{13}=6\cdot 250=1.500.$

$y=\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}\cdot 1.500=1.000$; $z=\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\cdot 1.500=750.$

$\underline{Devuelven: a\ la\ madre\ 1.500\ euros, al\ padre\ 1.000\ euros\ y\ al\ hijo\ 750\ euros.}$

****

2º) La producción de petróleo (millones de barriles) de un pozo petrolífero a lo largo del tiempo x (en años) se mide según la función:

$$f(x)=\begin{cases} 17x & si\ 0\le x<5 \\ -3x^2+30x+10 & si\ 5\le x<10 \\ 10 & si\ x\ge 10 \end{cases}.$$

a) Estudia la continuidad de la función $f(x)$. ¿Cuántos barriles de petróleo produce dicho pozo cuando $x=8$?

b) Calcula el área limitada por la función $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[2,3]$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en su dominio $D(f)\Rightarrow[0,+\infty)$, excepto para $x=5\ y\ x=10$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=5\Rightarrow\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}(17x)=17\cdot 5=85 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}(-3x^2+30x+10)=85=f(5) \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^+} f(x)=f(5)\Rightarrow \underline{f(x)\ es\ continua\ para\ x=5}.$$

$$Para\ x=10\Rightarrow\begin{cases} \lim\limits_{x\to 10^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 10}(17x)=17\cdot 10=170=f(10) \\ \lim\limits_{x\to 10^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 10}(-3x^2+30x+10)=10 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 10^-} f(x)=\lim_{x\to 10^+} f(x)=f(10)\Rightarrow \underline{f(x)\ es\ continua\ para\ x=10}.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ su\ dominio}.$$

$$f(8)=-3\cdot 8^2+30\cdot 8+10=-3\cdot 64+240+10=250-192=58.$$

$$\underline{La\ producción\ del\ pozo\ para\ x=8\ es\ de\ 58\ millones\ de\ barriles}.$$

b)

En el intervalo $[2,3]$ la función es $f(x)=17x$.

$$S=\int_2^3 f(x)\cdot dx=\int_2^3 17x\cdot dx=17\cdot\int_2^3 x\cdot dx=17\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3=$$

$$=17\cdot\left(\frac{3^2}{2}-\frac{2^2}{2}\right)=17\cdot\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right)=17\cdot\frac{5}{2}=\frac{85}{2}.$$

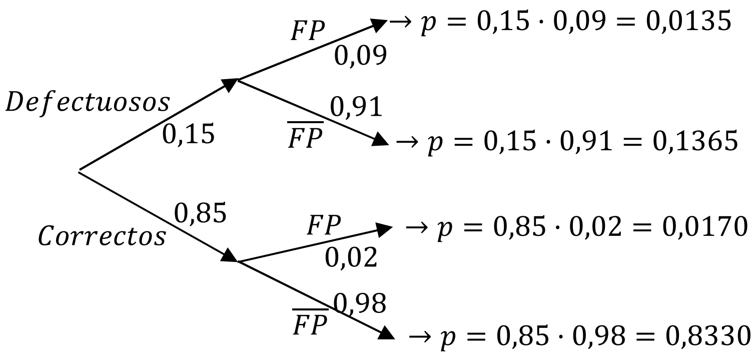
$$\underline{S = \frac{85}{2}\ u^2 = 42{,}5\ u^2}.$$

****

3º) El 15 % de los paquetes repartidos por una empresa de transporte llegan defectuosos. Entre los paquetes que llegan defectuosos un 9 % llega fuera de plazo, mientras que entre los no defectuosos sólo un 2 % llega fuera de plazo. Se elige un paquete al azar repartido por esta empresa:

a) Calcula la probabilidad de que el paquete elegido llegue fuera de plazo.

b) Sabiendo que el paquete elegido llega fuera de plazo, ¿qué probabilidad hay de que llegue defectuoso?



a)

$$P = P(FP) = P(D \cap FP) + P(C \cap FP) =$$

$$= P(D) \cdot P(FP/D) + P(C) \cdot P(FP/C) = 0{,}15 \cdot 0{,}09 + 0{,}85 \cdot 0{,}02 =$$

$$= 0{,}0135 + 0{,}0170 = \underline{0{,}0305}.$$

b)

$$P = P(D/FP) = \frac{P(D \cap FP)}{P(FP)} = \frac{P(D) \cdot P(FP/D)}{P(FP)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}09}{0{,}0305} = \frac{0{,}0135}{0{,}0305} = \underline{0{,}4426}.$$

****

4º) En el aeropuerto A, se toma una muestra de 100 días y se observa que en 25 hay saturación aérea. Con esos datos, se calculan dos intervalos de confianza para el parámetro proporción de días con saturación aérea en el aeropuerto A: $[0{,}122; 0{,}378]$ y $[0{,}165; 0{,}335]$. ¿Cuál es el intervalo de menor confianza? Justifica tu respuesta.

$$Datos: n = 100;\ \ p = \frac{25}{100} = 0{,}25;\ \ q = 1 - p = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{100}} = 0{,}04.$$

Estos datos son comunes para ambos intervalos, por lo cual, los intervalos de confianza dependen del nivel de confianza, de tal manera que a mayor confianza mayor intervalo de confianza.

Valor del intervalo $[0{,}122; 0{,}378] \Rightarrow 0{,}378 - 0{,}122 = 0{,}256.$

Valor del intervalo $[0{,}165; 0{,}335] \Rightarrow 0{,}335 - 0{,}165 = 0{,}170.$

$$\underline{El\ intervalo\ de\ menor\ confianza\ es\ [0{,}165; 0{,}335]}.$$

****