PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

JULIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que se puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Un comerciante dispone de 350.000 euros para comprar dos modelos de lámparas. El modelo A tiene un coste de 150 euros y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 15 euros. El modelo B tiene un coste de 100 euros y produce, por cada unidad que se vende, un beneficio de 11 euros. Por experiencia sabe que sólo puede almacenar 3.000 lámparas como máximo y que puede vender como máximo 2.000 lámparas del modelo A. Determina, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas lámparas de cada modelo debe comprar para maximizar el beneficio conseguido en las ventas. Calcula ese beneficio máximo.

Sean x e y el número de centenares de lámparas de los tipos A y B que se compran, respectivamente.

Las restricciones : $\left.\begin{array}{r} 1{,}5x+y\le 3.500 \\ x+y\le 300 \\ x\le 20;\;\; y\ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x+2y\le 70 \\ x+y\le 30 \\ x\le 20;\;\; y\ge 0 \end{array}\right\}.$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

$① \Rightarrow 3x+2y\le 70 \Rightarrow y\le \frac{70-3x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	10	20
y	20	5

$② \Rightarrow x+y\le 30 \Rightarrow y\le 30-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	30	0
y	0	30

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

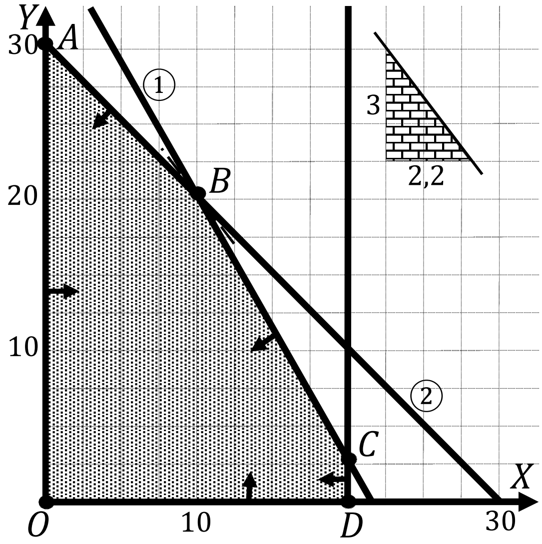
$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,30).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y=70 \\ x+y=30 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x+2y=70 \\ -2x-2y=-60 \end{array}\right\} \Rightarrow x=10;\;\; y=20 \Rightarrow B(10,20).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 20 \\ 3x + 2y = 70 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$60 + 2y = 70;\; y = 5 \Rightarrow C(20, 5).$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 20 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(20, 0).$$



La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 15x + 11y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 30) = 15 \cdot 0 + 11 \cdot 30 = 0 + 330 = 330.$

$B \Rightarrow f(10, 20) = 15 \cdot 10 + 11 \cdot 20 = 150 + 220 = 370.$

$C \Rightarrow f(20, 5) = 15 \cdot 20 + 11 \cdot 5 = 300 + 55 = 355.$

$D \Rightarrow f(20, 0) = 15 \cdot 20 + 11 \cdot 0 = 300 + 0 = 300.$

El máximo se produce en el punto $B(10, 20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 15x + 11y = 0 \Rightarrow y = -\frac{15}{11}x = -\frac{3}{2{,}2}x \Rightarrow m = -\frac{3}{2{,}2}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ fabricando\ 1.000\ lámparas\ modelo\ A\ y\ 2.000\ de\ B.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 37.000\ euros.}$$

****

2º) Representa gráficamente la función $y = f(x) = -ax^3 - bx + c$, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y que tiene un mínimo relativo en el punto $(x, y) = (1, -1)$. Justifica brevemente la representación gráfica obtenida.

Por pasar por el origen: $f(0) = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

La función resulta $y = f(x) = -ax^3 - bx$.

Por contener el punto $(x, y) = (1, -1)$ es $f(1) = -1$.

$f(1) = -1 \Rightarrow -a \cdot 1^3 - b \cdot 1 = -1;\ -a - b = -1;\ \ a + b = 1.$ (1)

Por tener $f(x)$ un mínimo relativo en $(x, y) = (1, -1)$ es $f'(1) = 0$.

$f'(x) = -3ax^2 - b$.

$f'(1) = 0 \Rightarrow -3a - b = 0;\ \ 3a + b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las expresiones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -a - b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a = -1;\ \ \underline{a = -\tfrac{1}{2}};\ -\tfrac{1}{2} + b = 1 \Rightarrow \underline{b = \tfrac{3}{2}}.$$

La función resulta:

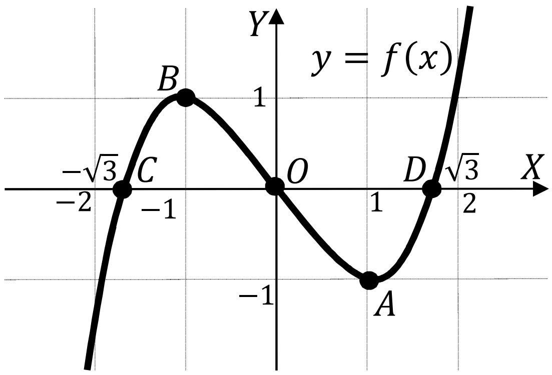
$$\underline{y = f(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{3}{2}x.}$$

Para la representación gráfica se tendrá en cuenta que la función es simétrica con respecto al origen, por ser $f(-x) = -f(x)$, por lo cual, si tiene un mínimo relativo en el punto $A(1, -1)$ también tiene un máximo relativo en el punto $B(-1, 1)$.

Los puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

$y = f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x = 0;$

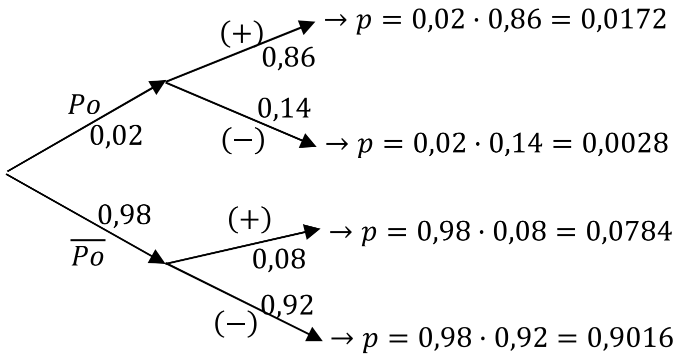
$$\frac{1}{2}x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0, 0) \\ x_1 = 0 \rightarrow C\left(-\sqrt{3}, 0\right). \\ x_1 = 0 \rightarrow D\left(\sqrt{3}, 0\right) \end{cases}$$



La representación gráfica, aproximada de la función es la que se indica en la figura adjunta.

****

3º) Una multinacional farmacéutica elabora un test para la detección precoz de la enfermedad producida por el virus del Ébola. El test da positivo en el 86 % de las personas que son portadoras del virus y da negativo en el 92 % de las personas que no son portadoras del virus. Además, en una cierta zona geográfica el 2 % de la población es portadora del virus. Se elige al azar una persona de esa zona geográfica y se la somete al test. Calcula razonadamente la probabilidad de que sea portadora del virus sabiendo que el test ha dado positivo.



$$P = P[Po/(+)] = \frac{P[Po \cap (+)]}{P(+)} = \frac{P(Po) \cdot P[(+)/Po]}{P(Po) \cdot P[(+)/Po] + P(\overline{Po}) \cdot P[(+)/\overline{Po}]} =$$

$$= \frac{0{,}02 \cdot 0{,}86}{0{,}02 \cdot 0{,}86 + 0{,}98 \cdot 0{,}08} = \frac{0{,}0172}{0{,}0172 + 0{,}0784} = \frac{0{,}0172}{0{,}0956} = \underline{0{,}1799}.$$

****

4º) Supongamos que tenemos una moneda de 2 euros trucada de manera que la probabilidad de que al lanzarla al aire salga cara es el triple de que salga cruz. Calcula razonadamente la probabilidad de que al lanzarla una vez al aire salga cruz.

$Sea\ P(cruz) = P(+) = x;\ \ P(cara) = P(c) = 3x.$

El espacio muestral es $E = \{c, +\}$.

La probabilidad del espacio muestral es la unidad, por lo cual:

$x + 3x = 1;\ \ 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}.$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ al\ lanzar\ la\ moneda\ salga\ cruz\ es\ p = \frac{1}{4} = 0{,}25.}$

****

OPCIÓN B

1º) Se considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y-(1-a^2)z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases}$. Calcula razonadamente los valores del parámetro a para que el sistema tenga soluciones distintas de la solución trivial $(0,0,0)$.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a^2-1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Por tratarse de un sistema lineal homogéneo, a efectos de rango, las matrices de coeficientes y ampliada son equivalentes.

El rango de la matriz de coeficientes, en función de a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2-1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}=4+10(a^2-1)+12-8(a^2-1)-30-2=$$

$$=2(a^2-1)-16=0;\ \ (a^2-1)-8=0;\ \ a^2=9 \Rightarrow a_1=-3, a_2=3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e iguales al número de incógnitas; en el caso que nos ocupa el número de incógnitas es tres, por lo cual:

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq -3 \\ a\neq 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=3 \Rightarrow Solución\ trivial: (0,0,0).}$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a=-3 \\ a=3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para $a=\pm 3$ el sistema resulta $\begin{cases} x+y+8z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado; para su resolución se elimina una ecuación (tercera) y se hace $z=\lambda$:

$$\left.\begin{matrix} x+y=-8\lambda \\ x+2y=-3\lambda \end{matrix}\right\} \ \left.\begin{matrix} -x-y=8\lambda \\ x+2y=-3\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=5\lambda;\ \ x+5\lambda=-8\lambda;\ \ x=-13\lambda.$$

$$\underline{Solución: x=-13\lambda,\ y=5\lambda,\ z=\lambda,\ \forall\lambda\in R.}$$

****

2º) Un alumno asiste a una clase que dura 60 minutos. Se estima que la capacidad de atención de un alumno en cada instante de tiempo t viene dada por la siguiente función: $f(t) = -2t^2 + 120t + 5, con\ t \in [0, 60]$.

a) Calcula la capacidad de atención cuando lleva una hora de clase.

b) Halla el instante de tiempo t (en minutos) en el que la capacidad de atención es máxima. ¿Cuál es la capacidad de atención máxima?

----

a)

$$f(60) = -2 \cdot 60^2 + 120 \cdot 60 + 5 = -7.200 + 7.200 + 5 = 5.$$

$$\underline{La\ capacidad\ del\ alumno\ cuando\ lleva\ una\ hora\ de\ clase\ es\ 5.}$$

b)

La función $f(t) = -2t^2 + 120t + 5$ es una parábola cóncava ($\cap$) cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(t) = -4t + 120. \quad f'(t) = 0 \Rightarrow -4t + 120 = 0;\ -t + 30 = 0 \Rightarrow t = 30.$$

$$\underline{La\ capacidad\ máxima\ del\ alumno\ se\ produce\ cuando\ lleva\ 30\ minutos.}$$

$$f(30) = -2 \cdot 30^2 + 120 \cdot 30 + 5 = -1.800 + 3.605 = 1.805.$$

$$\underline{La\ capacidad\ máxima\ del\ alumno\ cuando\ lleva\ 30\ minutos\ de\ clase\ es\ 1.805.}$$

****

3º) Se sabe que el tiempo de resolución de los exámenes propuestos por un profesor universitario sigue una distribución normal de media 74 minutos.

a) Si en el primer examen de este curso la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue 8 minutos, ¿cuál es la probabilidad de haber necesitado para resolver el examen más de 90 minutos disponibles?

b) En el segundo examen la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue de 9 minutos. Si se presentaron 36 alumnos a este segundo examen, determina la probabilidad de que el tiempo medio de resolución de esos alumnos fuera inferior a 77 minutos.

----

a)

$Datos$: $\mu = 74$; $\sigma = 8$.

$X \rightarrow N(\mu, \sigma) = N(74, 8)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-74}{8}$.

$$P = P(X > 90) = P\left(Z > \frac{90-74}{8}\right) = P\left(Z > \frac{16}{8}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228}.$$

b) En el segundo examen la desviación típica poblacional σ del tiempo de resolución fue de 9 minutos. Si se presentaron 36 alumnos a este segundo examen, determina la probabilidad de que el tiempo medio de resolución de esos alumnos fuera inferior a 77 minutos.

$Datos$: $\mu = 74$; $n = 36$; $\sigma = 9$.

$$X \rightarrow N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(74; \frac{9}{\sqrt{36}}\right) = N\left(74; \frac{9}{6}\right) = N(74;\ 1{,}5).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-74}{1{,}5}$.

$$P = P(X < 77) = P\left(Z < \frac{77-74}{1{,}5}\right) = P\left(Z < \frac{3}{1{,}5}\right) = P(Z < 2) = \underline{0{,}9772}.$$

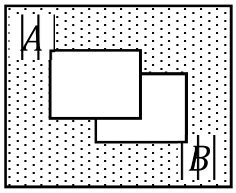
****

4º) Se consideran dos sucesos independientes A y B. Si la probabilidad de que ocurra A es $\frac{1}{2}$ y la probabilidad de que ocurran ambos a la vez es $\frac{1}{3}$, calcula la probabilidad de que no ocurra A y no ocurra B.

$Datos$: $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$.

Dos sucesos son independientes cuando: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, de donde pude obtenerse $P(B)$:

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$



$\overline{A} \cap \overline{B} = 1 - (A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}.$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{6} = \underline{\frac{1}{6} = 0{,}1667}.$$

****