PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá escoger una de las dos opciones y desarrollar las preguntas de la misma. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que se puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

1º) Los trabajadores de un taller artesano elaboran collares y pulseras de bisutería. En la elaboración de un collar se tardan 2 horas, mientras que se emplea 1 hora en la elaboración de una pulsera. Los materiales de los que disponen les permiten fabricar como mucho 50 piezas (entre collares y pulseras) y el tiempo dedicado a su elaboración no puede exceder de 80 horas. Sabiendo que obtienen un beneficio de 5 euros por la venta de un collar y de 4 euros por la venta de una pulsera, utiliza técnicas de programación lineal para calcular el número de collares y pulseras que tienen que elaborar para que su beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Sean x e y el número de collares y pulseras que se elaboran en el taller artesano, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+y\leq 50 \\ 2x+y\leq 80 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$.

$(1) \Rightarrow x+y\leq 50 \Rightarrow y\leq 50-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	50
y	50	0

$(2) \Rightarrow 2x+y\leq 80 \Rightarrow y\geq 80-2x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	40
y	80	0

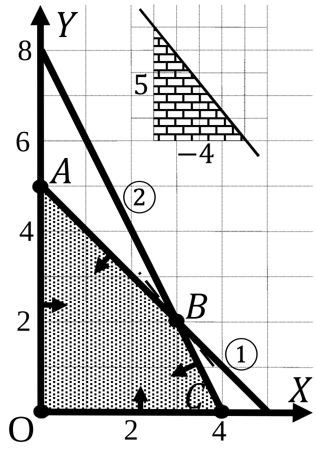
La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=5x+4y$.

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=50 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,50).$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=50 \\ 2x+y=80 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-y=-50 \\ 2x+y=80 \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$x = 30; y = 20 \Rightarrow B(30, 20).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 2x+y=80 \end{array}\right\} \Rightarrow C(40, 0).$$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 50) = 5 \cdot 0 + 4 \cdot 50 = 0 + 160 = 200.$

$B \Rightarrow f(30, 20) = 5 \cdot 30 + 4 \cdot 20 = 150 + 80 = 230.$

$C \Rightarrow f(40, 0) = 5 \cdot 40 + 4 \cdot 0 = 200 + 0 = 200.$

El máximo se produce en el punto $B(30, 20)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 5x + 4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{4}x \Rightarrow m = -\frac{5}{4}.$

$\underline{El\ benefico\ es\ máximo\ elaborando\ 30\ collares\ y\ 20\ pulseras.}$

$\underline{Los\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 230\ euros.}$

****

2º) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 4-x & si \ \ x<4 \\ x^2-16 & si \ x \geq 4 \end{cases}$.

a) Estudia razonadamente la continuidad de $f(x)$.

b) Analizar el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=4$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para \ x=4 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (4-x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (x^2-16) = 0 = f(4) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = f(4).$$

$$\underline{La \ función \ f(x) \ es \ continua \ en \ su \ dominio, que \ es \ R.}$$

b)

La función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 4)$ es $f(x)=4-x$, que es una recta de pendiente negativa, por lo cual es monótona decreciente en este intervalo.

En el intervalo $[4, +\infty)$ la función es $f(x)=x^2-16$, que es una parábola convexa $(\cup)$ cuyo vértice (mínimo) es el siguiente:

$$f'(x)=2x. \qquad f''(x)=2>0 \Rightarrow Justificación \ de \ mínimo.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow V(0, -16).$$

Aunque $V(0, -16) \notin [4, +\infty)$ indica que la función es monótona creciente en el intervalo.

$$\underline{Decrecimiento: f'(x)<0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, 4).}$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x)>0 \Rightarrow x \epsilon (4, +\infty).}$$

****

3º) Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1.480 euros. El sueldo de un trabajadora es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 euros.

a) Halla el intervalo de confianza del 90 % para el sueldo medio de un trabajador.

b) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador ser de 10 euros, con un confianza del 99 %, halla el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir.

----

a)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0{,}90 \rightarrow \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$
$1-0{,}05=0{,}9500 \rightarrow z=1{,}645).$

Datos: $n=625;\ \overline{x}=1.480;\ \sigma=250;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(1.480-1{,}645\cdot\frac{250}{\sqrt{625}};\ 1.480+1{,}645\cdot\frac{250}{\sqrt{625}}\right);$

$(1.480-1{,}645\cdot 10;\ 1.480+1{,}645\cdot 10);\ \ (1.480-16{,}45;\ 1.480+16{,}45).$

$$\underline{I.C._{90\,\%}=(1.463{,}55;\ 1.496{,}45).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0{,}99 \rightarrow \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$
$1-0{,}005=0{,}9950 \rightarrow z=2{,}575).$

Datos: $\sigma=250;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575;\ E=10.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2{,}575\cdot\frac{250}{10}\right)^2=$

$=(2{,}575\cdot 25)^2=64{,}375^2=4.144{,}14.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 4.145\ trabajadores.}$

****

4º) El 40 % de los internautas utiliza Dropbox o Google Drive para almacenar archivos en la nube. Sabiendo que el 25 % emplea Dropbox y el 20 % emplea Google Drive, ¿qué porcentaje de internautas emplea ambos?

$$Datos: P(D \cup GD) = 0{,}4;\ \ P(D) = 0{,}25;\ \ P(GD) = 0{,}2.$$

$$P(D \cup GD) = P(D) + P(GD) - P(D \cap GD) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(D \cap GD) = P(D) + P(GD) - P(D \cup GD) = 0{,}4 + 0{,}25 - 0{,}2 = 0{,}45.$$

$$\underline{Emplean\ ambos\ sistemas\ el\ 45\ \%\ de\ los\ internautas.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 3x+y+(a-1)z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$, en función del parámetro a:

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de a.

b) Resuelve el sistema para $a=3$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & a-1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1+3+3(a-1)-1-9-(a-1)=0;$$

$3a-3-6-a+1=0;\ \ 2a-8=0;\ \ a-4=0 \Rightarrow a=4.$

$$\underline{Para\ a\neq 4 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=4 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=4+3+9-1-3-36=-28\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=4 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

b)

Se resuelve para $a=3$ por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2\cdot 3-8}=\frac{1+3+24-4-2-9}{-2}=\frac{28-15}{-2}=\frac{13}{-2}=-\frac{13}{2}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-2}=\frac{3+12+2-3-8-3}{-2}=\frac{17-14}{-2}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{4+3+9-1-3-36}{-2} = \frac{16-40}{-2} = \frac{-24}{-2} = 12.$$

$$\underline{Solución: x = -\frac{13}{2},\ y = -\frac{3}{2},\ z = 12.}$$

****

2º) Se espera que en los próximos diez años, los beneficios (en millones de euros) de una empresa, vengan dados por la función $P(t) = t^2 - 10t + 16$, donde $t \in (0, 10]$ es el tiempo transcurrido en años desde el momento inicial.

a) Determina en qué momento del tiempo los beneficios serán de 16 millones de euros.

b) Determina en qué momento los beneficios serán mínimos.

----

a)

$$P(t) = 16 \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 16;\ \ t(t-10) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = 10.$$

$$\underline{Los\ beneficios\ son\ de\ 16\ millones\ de\ euros\ al\ comienzo\ y\ a\ los\ 10\ años.}$$

b)

La función $P(t) = t^2 - 10t + 16$ es una parábola convexa $(\cup)$ cuyo mínimo es el siguiente:

$$P'(t) = 2t - 10. \qquad P''(t) = 2 < 0 \Rightarrow Justificación\ de\ mínimo.$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow 2t - 10 = 0;\ \ t - 5 = 0 \Rightarrow t = 5.$$

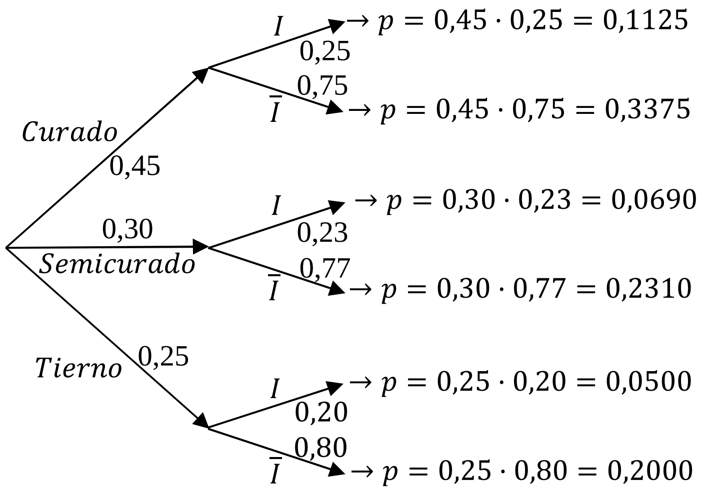
$$\underline{Los\ beneficios\ serán\ mínimos\ a\ los\ 5\ años\ del\ comienzo.}$$

****

3º) Una cadena de supermercados envasa tres variedades de queso en paquetes al vacío, en las proporciones que se indican: curado (45 %), semicurado (30 %) y tierno (25 %). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 25 % del queso curado, el 23 % del semicurado y el 20 % del tierno. Se elige al azar un paquete de queso:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de importación?

b) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado?



a)

$$P = P(\overline{I}) = P(C \cap \overline{I}) + P(S \cap \overline{I}) + P(T \cap \overline{I}) =$$

$$= P(C) \cdot P(\overline{I}/C) + P(S) \cdot P(\overline{I}/S) + P(T) \cdot P(\overline{I}/T) =$$

$$= 0{,}45 \cdot 0{,}75 + 0{,}30 \cdot 0{,}77 + 0{,}25 \cdot 0{,}80 = 0{,}3375 + 0{,}2310 + 0{,}2000 = \underline{0{,}7685}.$$

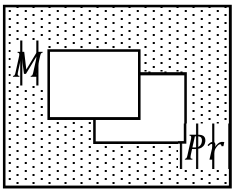
c)

$$P = P(C/I) = \frac{P(C \cap I)}{P(I)} = \frac{P(C) \cdot P(I/C)}{1 - P(\overline{I})} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}25}{1 - 0{,}7685} = \frac{0{,}1125}{0{,}2315} = \underline{0{,}4860}.$$

****

4º) La probabilidad de que un alumno de Matemáticas apruebe un examen tipo test es del 80 %, mientras que la probabilidad de que apruebe un examen de problemas es del 60 %. Si la probabilidad de aprobar los dos exámenes es del 50 %, calcula la probabilidad de que no apruebe ninguno de los dos exámenes.

$Datos: P(M) = 0{,}8;\ \ P(Pr) = 0{,}6;\ \ P(M \cap Pr) = 0{,}5.$



$\overline{M} \cap \overline{Pr} = 1 - (M \cup Pr)$

$P(M \cup Pr) = P(M) + P(Pr) - P(M \cap Pr) =$

$= 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}5 = 1{,}4 - 0{,}5 = 0{,}9.$

$P\left(\overline{M} \cap \overline{Pr}\right) = 1 - P(M \cup Pr) = 1 - 0{,}9 = \underline{0{,}1}.$

****